

Proszę rozwiązać ćwiczenia ze zdjęć i zaległe zadania z poprzednich tygodni. Uczniom którzy nie wysyłają zadań grozi ocena niedostateczna lub nieklasyfikowanie na koniec roku szkolnego. Przypominam że w każdą środę o godzinie 12.00 będą zamieszczane zadania (dla chętnych) na ocenę dobrą lub bardzo dobrą. Od 1 czerwca możliwe są konsultacje indywidualne w szkole. Zapisy na konsultacje za pośrednictwem wychowawców klas.

Mediana i moda

Mediana, moda i średnia mierzą mniej więcej to samo.

Trzy wymienione wielkości są próbami odpowiedzi na pytanie: **Jaka wartość jest typowa?** Czynniki to jednak w różny sposób i rzadko się zdarza, by miały taką samą wartość. Są zastosowania praktyczne, kiedy najlepiej jest użyć średniej, są takie zastosowania, kiedy więcej mówi nam mediana, i są takie, kiedy najwygodniejsza jest moda. Kiedy czego użyć to jednak sprawa skomplikowana i masz prawo na tym się nie znać. W zadaniu na maturze będzie podane, którą z tych wielkości należy obliczyć.

Medianę znajdujesz, ustawiając liczby rosnąco lub malejąco i patrząc, jaka liczba jest w środku.

Mediana to inaczej **wartość środkowa**. Tyle samo liczb (wartości danych) ma być mniejszych od mediany, co większych od niej. Najpierw musimy policzyć liczby, by wiedzieć, ile liczb ma być większych od mediany, a ile mniejszych. W naszym przykładzie liczb jest 9, a ich mediana jest równa 0,6, bo cztery liczby są mniejsze od 0,6, a cztery są większe od 0,6:

-0,2 0,3 0,3 0,4 0,6 0,8 0,9 1,2 2,5

Gdy obliczamy medianę, to patrzymy, ile liczb jest od niej większych albo mniejszych, ale nie ma znaczenia, czy są od mediany trochę mniejsze, czy dużo mniejsze (albo większe). Gdybyśmy w podanym przykładzie zamiast liczb 0,8, 0,9, 1,2 i 2,5 wzięli jakieś gigantyczne liczby, na przykład $6,02 \cdot 10^{23}$ (liczba Avogadra, pamiętasz z chemii?), to mediana nic a nic by się nie zmieniła:

-0,2 0,3 0,3 0,4 0,6 $6,02 \cdot 10^{23}$ $6,02 \cdot 10^{23}$ $6,02 \cdot 10^{23}$ $6,02 \cdot 10^{23}$

Jeśli liczba danych jest nieparzysta, to mediana jest jedną z wartości danych.

W przykładzie

-0,2 0,3 0,3 0,4 0,6 0,8 0,9 1,2 2,5

danych było 9, a mediana pokrywała się z liczbą numer pięć.

Mediana pięciu liczb {3, 6, 7, 8, 9} jest równa 7, ponieważ pokrywa się z liczbą numer 3.

Mediana siedmiu liczb {0, 1, 1, 1, 2, 7, 19} jest równa 1. Nie ma znaczenia, że liczba numer cztery pokrywa się z innymi liczbami.

W jednoelementowym zestawie liczb: {7}, mediana jest równa 7.

Ogólnie, jeśli danych jest $2k + 1$ (liczba nieparzysta), a liczby zostały uporządkowane monotonicznie, to medianę wskazuje liczba k -ta (tzn. liczba o numerze k).

Jeśli liczba danych jest parzysta, to mediana wypada w połowie pomiędzy dwoma wartościami danych.

Jeśli dwie wartości, o których mowa, są równe, to mediana jest im równa, ale to sytuacja wyjątkowa.

Mediana czterech liczb {6, 7, 8, 9} jest równa 7,5 (w połowie między 7 i 8).

Mediana ośmiu liczb {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} jest oczywiście równa 0.

Mediana ośmiu liczb {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 i 2} też jest równa 0. Zauważ, że zmieniliśmy niektóre liczby na większe, a na medianę to nie wpłynęło!

Ogólnie, jeśli danych jest $2k$ (liczba parzysta), to medianę wskazuje średnia z liczb o numerach k oraz $k + 1$.

Obliczanie mediany zacznij od policzenia liczb, a potem odrzucaj liczby skrajne.

Gdy policzysz, ile jest danych, to ustalisz, ile z nich ma być większych od mediany, a ile od niej mniejszych. Jeśli liczby masz uporządkowane i wypisane w jednej linii, wystarczy zasłonić lewą ręką liczby najmniejsze, a prawą tyle samo liczb największych, aż w środku zostanie mediana (lub dwie liczby, między którymi mediana leży).

W zestawie liczb

1 2 2 3 4 5 5 7 11 12 23 47 121 123 143

możemy przysłonić siedem liczb z lewej i siedem liczb z prawej i zostanie nam mediana (równa 7).

W zestawie liczb

1 2 2 3 4 5 5 7 11 12 23 47 123 143

możemy przysłonić sześć liczb z lewej i sześć z prawej i zostają nam dwie liczby, a mediana całego zestawu jest średnią tych dwu liczb (i jest równa 6).

Jeśli dane przedstawiono w postaci tabelki liczebności albo diagramu, to także trzeba wpierw policzyć liczby, zorientować się, ile ich trzeba odrzucić, a potem przystąpić do odrzucania wartości skrajnych.

Przykład 355 (III). Oblicz medianę liczb przedstawionych w tabeli liczebności:

| | | | | |
|------------|----|---|---|---|
| wartość | -2 | 4 | 6 | 8 |
| liczebność | 2 | 4 | 4 | 5 |

Rozwiązanie. Dane są uporządkowane. Możemy policzyć $(2 + 4 + 4 + 5)$, że jest ich 15, dlatego powinniśmy usunąć po 7 liczb skrajnych. Prościej może być dane z tabeli usuwać sukcesywnie i patrzeć, co nam zostaje. Najpierw usuniemy 2 dane o wartości -2 i dla równowagi 2 dane z prawego końca:

| | | | | |
|------------|----|---|---|---|
| wartość | -2 | 4 | 6 | 8 |
| liczebność | 0 | 4 | 4 | 3 |

Teraz usuńmy po 3 dane z obu końców:

| | | | | |
|------------|----|---|---|---|
| wartość | -2 | 4 | 6 | 8 |
| liczebność | 0 | 1 | 4 | 0 |

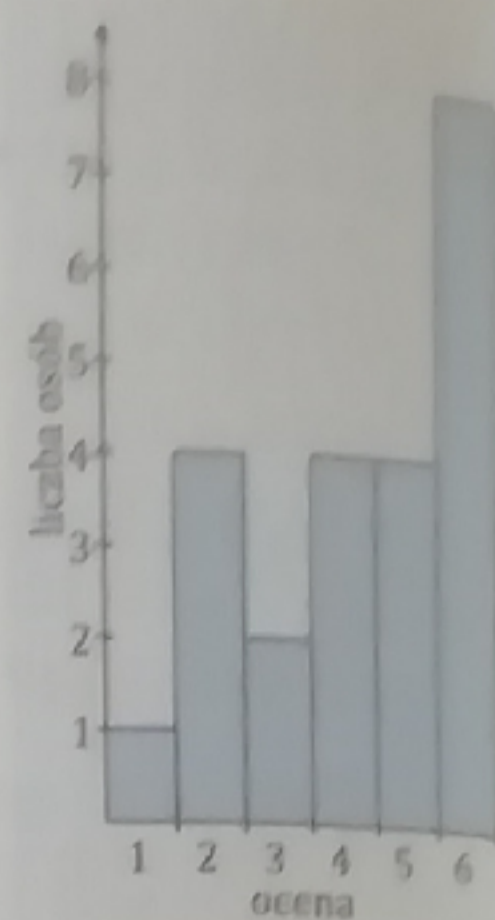
Gdy usuniemy jeszcze po 1 danej z obu stron, to wszystkie te dane, które zostaną, będą miały wartość 6:

| | | | | |
|------------|----|---|---|---|
| wartość | -2 | 4 | 6 | 8 |
| liczebność | 0 | 0 | 3 | 0 |

Odpowiedź: mediana jest równa 6. ■

Przykład 356 (M). Wyniki sprawdzianu przedstawiono na diagramie. Oblicz medianę ocen uzyskanych przez uczniów.

Rozwiązanie. Najpierw musimy policzyć, ile mamy danych: $1 + 4 + 2 + 4 + 4 + 8 = 23$. W takim razie mediana to ocena osoby, która w kolejności wyników była dwunasta (11 osób było od niej gorszych, a 11 lepszych). Odrzucimy 11 osób z najslabszymi wynikami. Jeśli odrzucimy tych z ocenami „1”, „2”, „3” i „4” to odrzucimy w sam raz 11 osób. Odrzucając tych z oceną „6”, pozbywamy się ośmiu osób o najwyższych ocenach, ale ponieważ mamy się pozbyć jedenastu osób, trzeba odrzucić jeszcze trzy osoby z oceną „5”. Pozostanie nam wtedy samotna ocena „5”, a więc to ona stanowi medianę.



Ćwiczenie 536. Oblicz medianę danych:

a) $-99, -98, -34, -32, -31, 0, 0, 2, 19$;

b) $1, 1, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 7$.

Ćwiczenie 537 (M). Mediana danych przedstawionych w tabeli liczebności jest równa:

| | | | | |
|------------|---|---|---|---|
| wartość | 0 | 1 | 2 | 3 |
| liczebność | 5 | 2 | 1 | 1 |

A) 0

B) 0,5

C) 1

D) 5.

Ćwiczenie 538. Oblicz medianę liczb przedstawionych w tabeli liczebności

a)

| | | | | | |
|------------|----|---|---|---|---|
| wartość | -2 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| liczebność | 1 | 4 | 3 | 5 | 6 |

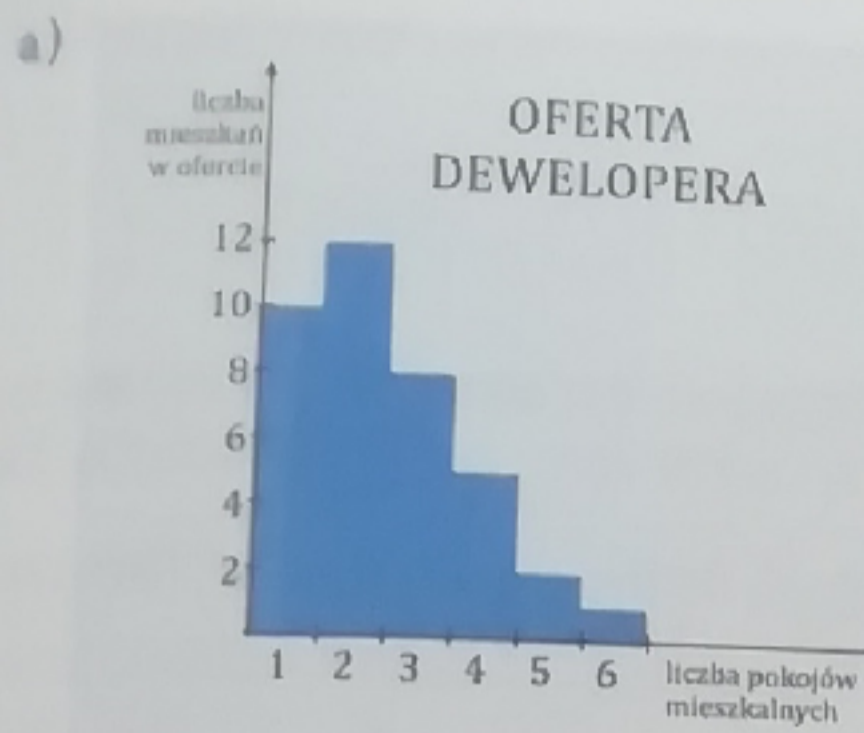
b)

| | | | | | |
|------------|---|---|---|---|----|
| wartość | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| liczebność | 5 | 2 | 1 | 4 | 12 |

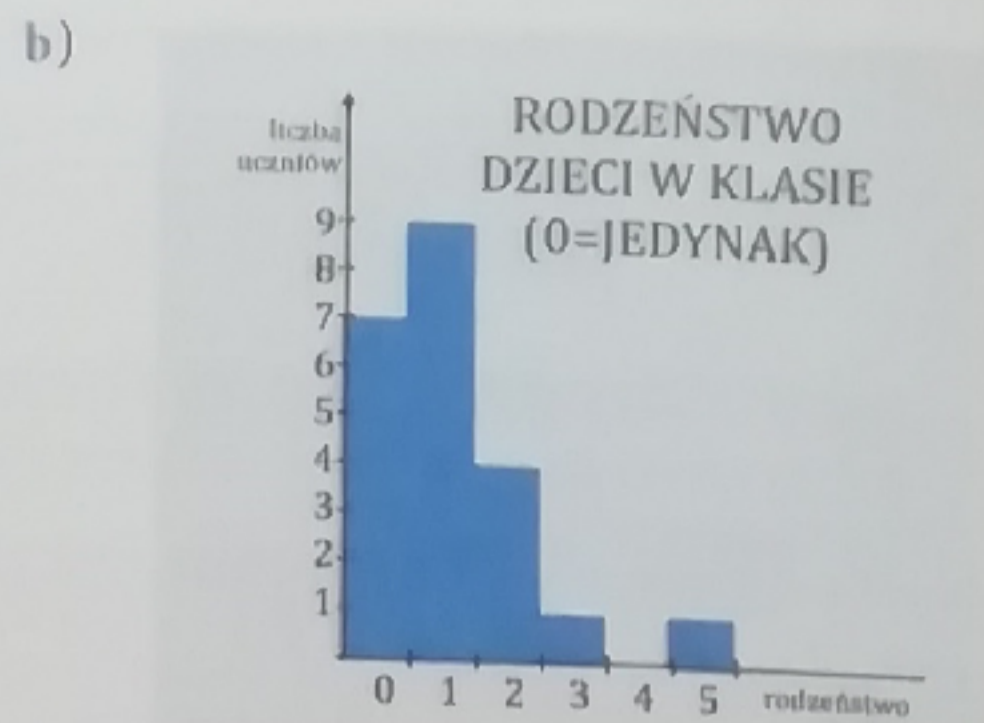
c)

| | | | | |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| wartość | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| liczebność | 100 | 31 | 22 | 11 |

Ćwiczenie 539. Oblicz medianę danych przedstawionych na diagramach:



Oferta dewelopera: liczba mieszkań o różnej liczbie pokoi.



Liczebność rodzin: liczba rodzeństwa, jaką mają uczniowie w pewnej klasie.

- **Ćwiczenie 540.** Oblicz wartość największą, najmniejszą, medianę i rozstęp danych przedstawionych w postaci tabelki liczebności:

| | | | | | | |
|------------|----|---|---|---|---|---|
| wartość | -3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| liczebność | 1 | 5 | 2 | 1 | 2 | 1 |

Zanim wskażesz medianę, uporządkuj liczby.

Ręczne wyszukanie mediany w zbiorze tysiąca nieuporządkowanych liczb to poważne przedsięwzięcie. Nawet dla kilkudziesięciu liczb może zająć parę minut. Zanim wskażesz medianę, liczby poprzestawiaj lub ponumeruj.

- **Ćwiczenie 541.** Wskaż medianę danych:

a) 4, 3, 2, 1, 1, 3, 4, 0, 1, 3;

b) 2, 2, 3, 1, 0, 5, 4, 6, 0, 1.

- **Ćwiczenie 542.** Wskaż medianę w zbiorze 29 nieuporządkowanych liczb: 123, 112, 174, 145, 125, 131, 120, 131, 144, 108, 111, 103, 132, 127, 142, 110, 117, 142, 122, 132, 132, 111, 132, 126, 109, 121, 111, 124, 120.

Moda to wartość, która najczęściej się powtarza.

Moda występuje w różnych książkach pod różnymi nazwami. Trzeba wszystkie te nazwy znać:

moda = wartość modalna = dominanta = wartość najczęstsza =

= wartość najbardziej prawdopodobna

Moda to ta wartość, która się najczęściej powtarza w zbiorze danych.

W przypadku danych

-0,2 0,3 0,3 0,4 0,6 0,8 0,9 1,2 2,5

moda jest równa 0,3. Ta liczba powtarza się dwa razy, a inne tylko raz. Nie ma znaczenia, że moda wypada „na skraju” zbioru danych, a większość liczb jest od niej większa.