

Temat: Prawo powszechnego ciążenia.

Pomoce: podręcznik, epodreczniki

Link: <https://epodreczniki.pl/a/prawo-powszechnego-ciazenia/DIdzGlunk>

Film: <https://www.youtube.com/watch?v=swPz2Zlely0> (5 minut)

# 8.1. Prawo powszechnego ciążenia

## Przypomnij sobie

- Każde dwa ciała we Wszechświecie przyciągają się siłami grawitacji.
- Siłę grawitacji można wyznaczyć, korzystając z prawa powszechnego ciążenia sformułowanego przez Izaaka Newtona.
- Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki oddziaływanie ciał są wzajemne.



Rys. 8.1. Dzięki sile grawitacji galaktyki nie rozpadają się na pojedyncze gwiazdy

Spadanie przedmiotów na powierzchnię Ziemi, krążenie Księżyca wokół Ziemi, ruch planet wokół Słońca, powstawanie galaktyk i wiele innych zjawisk wiąże się z istnieniem we Wszechświecie oddziaływań grawitacyjnych. Dlatego mówimy, że jest to siła powszechna.

Siła grawitacji jest zawsze siłą przyciągającą. Jej wartość zależy od mas przyciągających się ciał oraz odległości między nimi. Wartość tę wyznaczamy, korzystając z prawa powszechnego ciążenia sformułowanego przez Izaaka Newtona w 1687 roku.

## ■ Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia sformułowane dla punktów materialnych mówi że dwa punkty materialne przyciągają się siłami grawitacji działającymi wzdłuż prostej łączącej te punkty, a wartość każdej z tych sił jest wprost proporcjonalna do ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie:

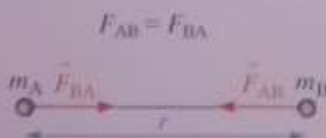
$F$  – wartość siły grawitacji,

$r$  – odległość między punktami materialnymi,

$m_1, m_2$  – masy punktów materialnych,

$G$  – stała proporcjonalności nazywana **stałą grawitacji** (jest to stała uniwersalna, czyli taka sama w całym Wszechświecie i niezmienna w czasie);  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siły grawitacji działające między dwoma ciałami mają tę samą wartość i ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty (rys. 8.2.).



Rys. 8.2. Siły grawitacji, jakimi wzajemnie oddziałują punkty materialne, mają ten sam kierunek, przeciwne zwroty i tę samą wartość

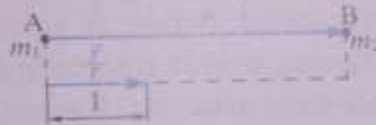
## Wektorowy zapis prawa grawitacji

Wektor siły grawitacji, którą ciało A działa na ciało B, można zapisać w postaci:

$$\vec{F}_{AB} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem biegnącym od ciała A do ciała B (rys. 8.3.).

Dlaczego powyższy wzór ma taką postać? Otóż gdy podzielimy wektor  $\vec{r}$  przez jego długość, otrzymamy wektor  $\frac{\vec{r}}{r}$  o długości jednostkowej, skierowany od ciała A w stronę ciała B, czyli przeciwnie niż siła grawitacji. Kiedy pomnożymy wektor  $\frac{\vec{r}}{r}$  przez wartość siły grawitacji (wyrażenie  $G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ), otrzymamy wektor o takiej samej wartości jak siła grawitacji, ale przeciwnie zwrotiony. Po uwzględnieniu minusa otrzymujemy prawidłowy zwrot.



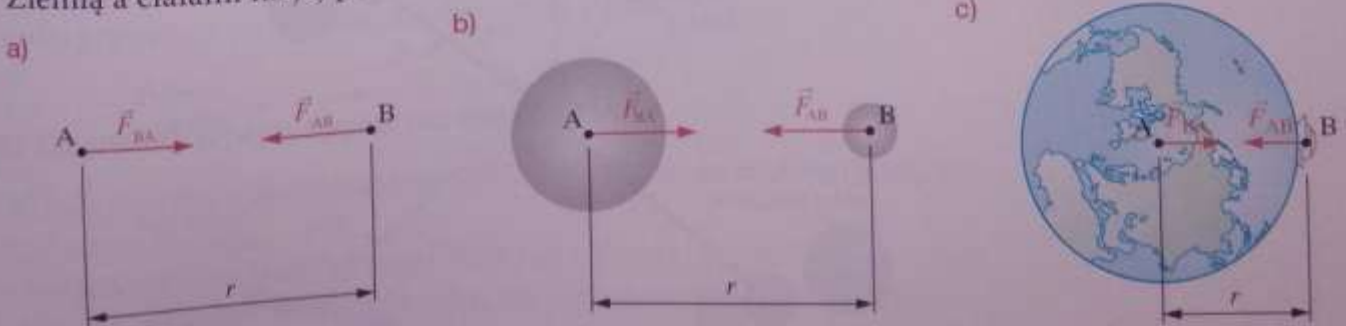
Rys. 8.3. Wektor  $\frac{\vec{r}}{r}$  skierowany jest od ciała A w stronę ciała B i ma długość jednostkową

## Kiedy można stosować wzór na siłę grawitacji

Wzór na siłę grawitacji można stosować m.in. do opisu oddziaływania między:

- dwoma punktami materialnymi (ten model ma zastosowanie także w przypadku ciał niebieskich, które są niewielkie w stosunku do dzielących je odległości – rys. 8.4a.),
- dwiema jednorodnymi kulami (wówczas  $r$  oznacza odległość między środkami kul – rys. 8.4b.),
- jednorodną kulą a ciałem o dowolnym kształcie i rozmiarach znacznie mniejszych od niej (wówczas  $r$  jest równe odległości między środkiem kuli a ciałem – rys. 8.4c.).

Ostatni przypadek obejmuje w szczególności oddziaływanie między Ziemią a ciałami na jej powierzchni i w jej pobliżu.



Rys. 8.4. Wzór na siłę grawitacji ma zastosowanie do: a) punktów materialnych, b) jednorodnych kul, c) jednorodnej kuli i ciała znacznie mniejszego od niej

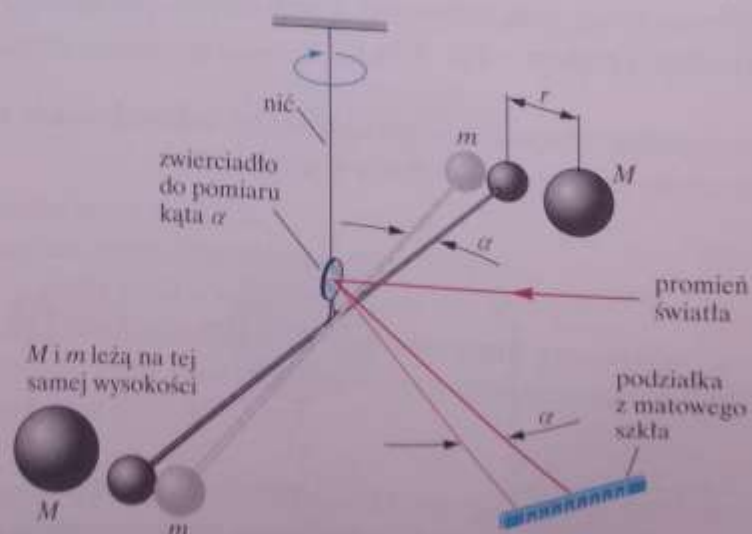


**Rys. 8.5.** Gdy wymiary ciał są niewielkie w stosunku do odległości między nimi (a), wzór Newtona da znacznie dokładniejszy wynik niż w przypadku podłużnych ciał, która dzieli niewielką odległość (b)

Wzór  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  można także stosować w innych przypadkach niż podane na poprzedniej stronie. Wynik będzie wtedy przybliżony, a przybliżenie tym mniej dokładne, im większe będą odstępstwa od podanych założeń. Na przykład dla dwóch samochodów stojących na końcach parkingu (rys. 8.5a.) uzyskamy wynik w miarę zbliżony do rzeczywistej wartości siły, jednak już dla dwóch autobusów stojących obok siebie wzór da wynik wielokrotnie odbiegający od rzeczywistości (rys. 8.5b.).

### ■ Wyznaczanie stałej grawitacji

Siły grawitacji są bardzo słabe, pomiar stałej grawitacji był zatem i nadal jest bardzo trudnym zadaniem. Po raz pierwszy tę stałą wyznaczył **Henry Cavendish** (czyt. henri kawendysz) w 1798 roku, czyli ponad 100 lat po ogłoszeniu przez Newtona prawa powszechnego ciężenia. O dokładności jego prac świadczy fakt, że różnica między wynikami pomiaru stałej  $G$  uzyskanymi w 1798 roku i współcześnie nie przekracza 1%. Do wyznaczenia stałej grawitacji Cavendish wykorzystał urządzenie pomiarowe, którego schemat przedstawiono na rysunku 8.6. Dwie kulki o jednakowych masach  $m$  umieścił na końcach lekkiego pręta, który był zawieszony na sprężystej nici. Następnie do małych kulek na pręcie zbliżył dwie duże kule z ołowiu o jednakowych masach  $M$ . Pod wpływem przyciągania ołowianych kul zamocowane na pręcie kulki przesunęły się w ich stronę, co spowodowało skrócenie nici. Aby dokładnie zmierzyć kąt skrócenia, do nici, przytwierdzonej do pręta, badacz przymocował zwierciadło. Promień światła odbitego od zwierciadła padający na odległy ekran ze skalą pozwolił precyzyjnie zmierzyć kąt skrócenia, co z kolei umożliwiło obliczenie momentu siły skracającej nić, a na jej podstawie – wartości siły grawitacji. Znając masy kul oraz odległość  $r$ , Cavendish obliczył stałą grawitacji  $G$ .



**Rys. 8.6.** Przyrząd służyący do pomiaru stałej grawitacji w doświadczeniu Cavendisha

Doświadczenie Cavendisha zapoczątkowało eksperymentalny kierunek badań nad oddziaływaniami grawitacyjnymi. Używając różnych ciał, na przykład kul ołowianych, stalowych lub marmurowych o jednakowej masie, można stwierdzić, że **siły grawitacji nie zależą od rodzaju substancji, z jakiej są zbudowane ciała.**

## ■ Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety

Wiemy, że na Ziemi wszystkie ciała w próżni spadają z takim samym przyspieszeniem. A jak jest w przypadku innych ciał niebieskich? Planeta (lub inne ciało niebieskie) o masie  $M$  i promieniu  $R$  przyciąga ciało o masie  $m$  znajdujące się w pobliżu jej powierzchni siłą o wartości:

$$F = G \frac{M}{R^2} \cdot m.$$

Wielkość  $G \frac{M}{R^2}$  jest stała dla danej planety, siła grawitacji działająca na ciało na powierzchni planety jest zatem wprost proporcjonalna do masy tego ciała ( $F \sim m$ ).

Jeżeli na ciało działa tylko siła grawitacji planety, to zgodnie z drugą zasadą dynamiki porusza się ono z przyspieszeniem:

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R^2}.$$

Nazywamy je **przyspieszeniem grawitacyjnym** i oznaczamy symbolem  $g$ . W przypadku Ziemi nosi ono nazwę **przyspieszenia ziemskiego**. Wyprowadzony przez nas wzór pozwala nie tylko obliczyć przyspieszenie grawitacyjne dla różnych planet. To właśnie dzięki niemu po raz pierwszy „zważono Ziemię”, czyli wyznaczono jej masę:

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G},$$

Aby obliczyć masę Ziemi zgodnie z tym wzorem, potrzebna jest znajomość trzech wielkości:  $g$ ,  $R_Z$  i  $G$ . Przyspieszenie ziemskie można łatwo zmierzyć za pomocą wahadła, promień Ziemi wyznacza się za pomocą pomiarów geodezyjnych (z dość dużą dokładnością zrobiono to już w starożytności). Jednak dopiero wyznaczenie przez Cavendisha stałej grawitacji pozwoliło obliczyć masę Ziemi.

## ■ Czynniki wpływające na ciężar ciała

W powyższych obliczeniach przyjęliśmy założenie, że Ziemia jest kulą. Pominęliśmy:

- niejednorodny rozkład masy wewnątrz Ziemi (gęstość Ziemi maleje wraz z odległością od jej środka, ale nie zależy wyłącznie od niej),
- spłaszczenie Ziemi (promień biegunowy jest nieco mniejszy od równikowego).



Rys. 8.7. Inną metodę pomiaru stałej grawitacji zastosował w 1880 r. Philipp von Jolly. Użył on wagi z podwójnymi szalkami.

$M_Z$  – masa Ziemi,  
 $R_Z$  – promień Ziemi,  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie.

Wyznaczanie  $g$  za pomocą wahadła  
 s. 34



## A to ciekawe

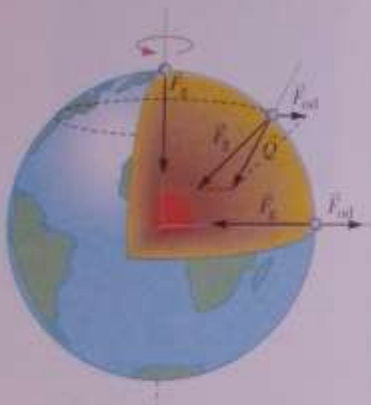
W 1966 roku amerykański fizyk L. M. Stephenson przeanalizował bardzo dokładne pomiary stałej grawitacji  $G$  wykonane w National Bureau of Standards w Waszyngtonie (na zdjęciu) i stwierdził, że jej wartość wydaje się zależeć od pory roku: maleje jesienią, a rośnie wiosną. Różnice były na tyle duże, że nie można ich było przypisać założonej niepewności pomiarowej. Zależność ta pozostawała zagadką do czasu, gdy okazało się, że różnice wynikały ze zmian gęstości gleby, która podczas jesiennych ulew nasiąkała wodą, w znaczący sposób wpływając na wynik pomiaru. Stała grawitacji pozostawała w rzeczywistości bez zmian.

Oba te czynniki mają wpływ na przyspieszenie grawitacyjne. Jeśli interesuje nas rzeczywiste przyspieszenie, z którym ciała spadają na Ziemi, musimy wziąć pod uwagę także ruch obrotowy Ziemi i związaną z nim siłę odśrodkową.

Te czynniki sprawiają, że przyspieszenie ziemskie na biegunie wynosi  $9,83 \frac{m}{s^2}$ , a na równiku  $9,78 \frac{m}{s^2}$ .

**Ciężar  $\vec{Q}$  ciała na Ziemi** jest wypadkową siły grawitacji  $\vec{F}_g$  i siły odśrodkowej  $\vec{F}_{od}$  wynikającej z ruchu obrotowego Ziemi:

$$\vec{Q} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}$$



**Rys. 8.8.** Wektory ciężaru i siły grawitacji leżą na tej samej prostej tylko na równiku, gdzie siła grawitacji jest skierowana prostopadle do osi obrotu Ziemi, i na biegunie, gdzie siła bezwładności nie występuje. Proporcje wektorów nie zostały zachowane.

Analizując rysunek 8.8., zauważymy, że siła  $\vec{F}_{od}$  nie jest skierowana od środka Ziemi, ale od środka równoleżnika, na którym znajduje się ciało. Kierunki siły grawitacji i siły odśrodkowej są więc różne (poza ciałami na równiku), a kierunek wypadkowej tych sił nie pokrywa się z kierunkiem żadnej z nich.

Ponieważ siła odśrodkowa nie występuje na biegunach (gdzie leżą one na osi obrotu Ziemi), ciężar ciała jest tam równy sile grawitacji ( $Q = F_g$ ). Na równiku siła grawitacji i siła odśrodkowa leżą na tej samej prostej, ale mają przeciwne zwroty. Ciężar ciała, a ściślej jego wartość, wynosi:

$$Q = F_g - F_{od}$$

### Po tej lekcji powinieneś:

- wiedzieć, w jakich sytuacjach można stosować wzór na siłę grawitacji, wynikający z prawa powszechnego ciążenia,
- wyprowadzić wzór na przyspieszenie grawitacyjne planety w zależności od jej promienia i masy,
- wiedzieć, co wpływa na ciężar ciała na obracającej się planecie, i obliczać go.