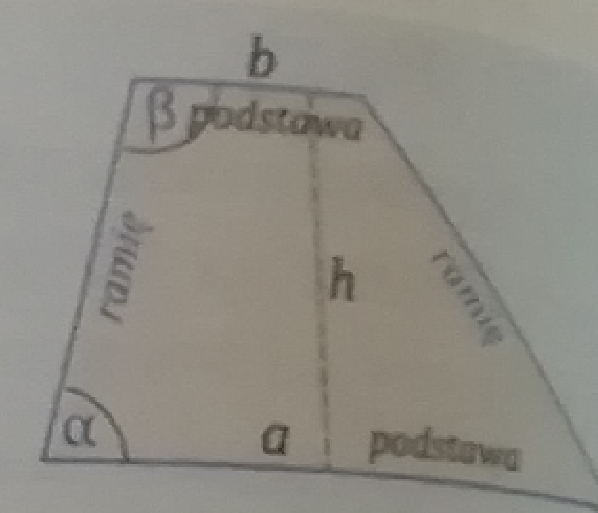
Proszę rozwiązać ćwiczenia ze zdjęć i zaległe zadania z poprzednich tygodni. Uczniom którzy nie wysyłają zadań grozi ocena niedostateczna
lub nieklasyfikowanie na koniec roku szkolnego. Przypominam że w każdą środę o godzinie 12.00 będą zamieszczane zadania (dla chętnych) na ocenę dobrą lub bardzo dobrą. Od 1 czerwca możliwe są konsultacje indywidualne w szkole. Zapisy na konsultacje za pośrednictwem wychowawców klas.

Trapezy

Trapez ma jedną parę boków równoległych, zwanych podstawami, i dwa ramiona.

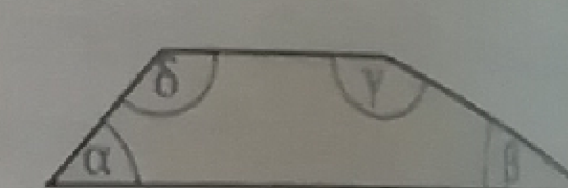
Ramiona trapezu nie muszą być równoległe (ale mogą, wtedy taki trapez zwiemy równoległobokiem). Suma kątów przy danym ramieniu trapezu jest równa 180°.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Na ogół jeden z tych kątów jest ostry, a drugi — rozwarty. Na rysunku zaznaczono jedną taką parę kątów. Ponieważ relacja jest bardzo prosta, można ją wykorzystać w zadaniach testowych.

Przykład 264. W trapezie suma kątów ostrych jest równa 80°, a jeden z tych kątów jest o 20° większy od drugiego. Jakie są miary wszystkich czterech kątów trapezu?



Rozwiązanie. Dla dwóch kątów ostrych, które będziemy oznaczać α i β, zachodzą dwa warunki, które możemy potraktować jak układ równań (załóżmy, że $\alpha > \beta$):

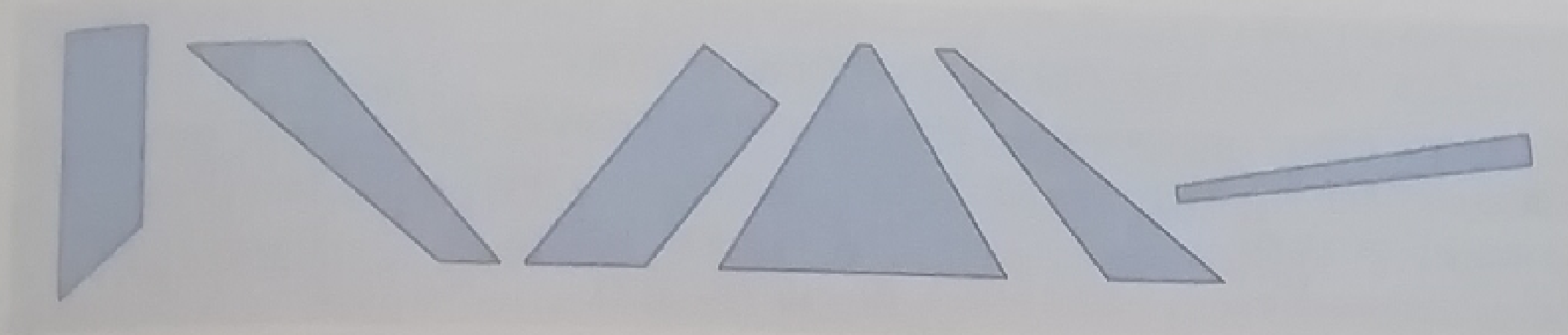
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 80^\circ \\ \alpha - \beta = 20^\circ \end{cases}$$

Rozwiązać taki układ jest bardzo łatwo i znajdziemy $\alpha = 50^\circ$ oraz $\beta = 30^\circ$. W takim razie dwa pozostałe kąty muszą być równe $\gamma = 180^\circ - \alpha = 130^\circ$ oraz $\delta = 180^\circ - \beta = 160^\circ$. Dla pewności sprawdzamy, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. ■

Ćwiczenie 352. W trapezie $ABCD$ kąt o wierzcholku A ma o 75% mniejszą miarę niż kąt o wierzcholku D, a ten ma miarę o 10% mniejszą niż kąt o wierzcholku B. Oblicz miary wszystkich kątów w trapezie.

Nie ma reguły, jak ma „optycznie" wyglądać trapez.

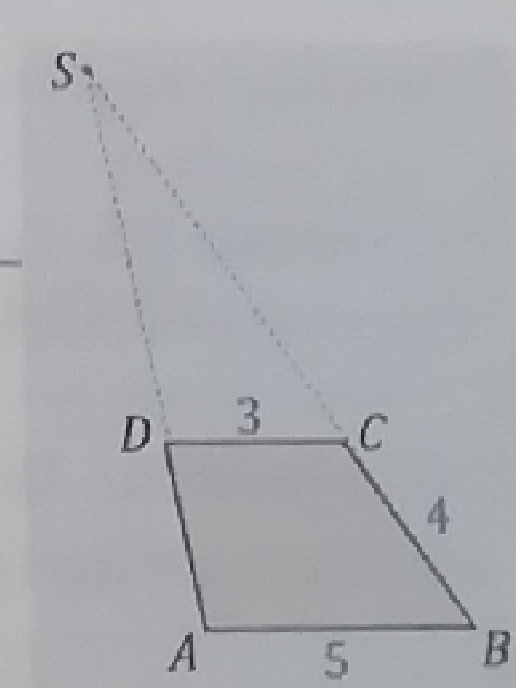
Możliwości jest wiele, niektóre ukazano niżej.



Gdy widzisz trapez, pomyśl o twierdzeniu Pitagorasa i podobieństwie trójkątów.

Jeśli z któregoś wierzchołka trapezu opuścimy **wysokość**, zauważymy trójkąt prostokątny, a to pomaga w niejednym zadaniu. Na trapez możemy patrzeć jak na ilustrację do rozważań o podobieństwie figur, zwłaszcza jeśli **przedłużymy ramiona** aż do przecięcia albo gdy rozważamy **przekątne** trapezu.

Przykład 265. Skorzystaj z danych zamieszczonych na rysunku i oblicz, w jakiej odległości od punktu C znajduje się punkt przecięcia prostych zawierających ramiona trapezu.



Rozwiązanie. Rysunek jest bardzo dobrą ilustracją podobieństwa trójkątów. Podobne są w tym wypadku trójkąty ABS i DCS. Oznaczmy szukaną długość odcinka CS symbolem x. Zauważamy, że trójkąt ABS jest powiększeniem trójkąta DCS: odcinek CD długości 3 został powiększony tak, że osiągnął długość 5, a odcinek CS długości x został powiększony tak, że osiągnął długość $|SB|$, czyli $x + 4$. Oba odcinki zostały powiększone w tej samej skali, co można zapisać w formie proporcji: $\frac{5}{3} = \frac{x+4}{x}$.

Przekształcamy tę proporcję do postaci: $5x = 3(x+4)$, skąd uzyskujemy $2x = 12$, a stąd $x = 6$. ■

Ćwiczenie 353. Wysokości opuszczone z końców krótszej podstawy trapezu na dłuższą podstawę mają długość 5 i dzielą dłuższą podstawę na odcinki długości 3, 5 i 7. Oblicz długości ramion tego trapezu.

Ćwiczenie 354. Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się punkcie S. Długości odcinków AS, BS i CS są równe odpowiednio 4, 5 i 6. Długość odcinka DS jest równa

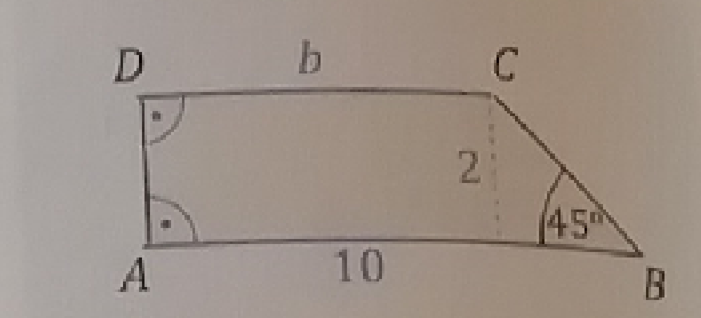
A) 3 B) 4,5 C) 7 D) 7,5.

Trapez prostokątny można rozłożyć na prostokąt i trójkąt prostokątny.

W trapezie **prostokątnym** istnieją kąty proste. Takie kąty są dwa albo cztery (wtedy trapez jest prostokątem). Przy jednym z ramion trapezu prostokątnego oba kąty są proste. Jedno ramię jest prostopadłe do obu podstaw i jest to **ramię krótsze**, natomiast ramię dłuższe jest nachylone do podstaw pod kątem różnym od kąta prostego (wyjątek to trapez będący prostokątem).

Wysokość odcina trójkąt prostokątny i pozostawia prostokąt, którego przeciwprostokątną stanowi dłuższe ramię trapezu, a dwie przyprostokątne to: wysokość trapezu oraz **różnica długości** jego podstaw.

Przykład 266 (*III*). Trapez o dłuższej podstawie 10 i kątach przy niej równych 90° i 45° ma wysokość 2. Jaki jest obwód tego trapezu?



Rozwiązanie. Obwód znajdziemy, jeśli znajdziemy wszystkie boki trapezu. Zaznaczamy wysokość, która odetnie nam trójkąt prostokątny. Widzimy, że jest to trójkąt o kącie ostrym 45°, a więc typu **ekierki** 45-45-90. Znając właściwości takiej ekierki wiemy, że obie przyprostokątne są równe (i mają długość równą 2), a przeciwprostokątna (ramię trapezu), jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa, czyli jej długość wynosi $2\sqrt{2}$.

Patrząc na rysunek, znajdujemy długość krótszej z podstaw: $b = 10 - 2 = 8$.

Znamy komplet boków trapezu, więc po to, by znaleźć obwód, sumujemy ich długości:
$L = 10 + 2 + 8 + 2\sqrt{2} = 20 + 2\sqrt{2} \approx 22{,}83$. ■

Ćwiczenie 355. Długość odcinka BC, stanowiącego dłuższe ramię trapezu prostokątnego $ABCD$ jest trzy razy większa od różnicy długości podstaw tego trapezu. Oblicz sinus kąta ostrego ABC.

Ćwiczenie 356. Podstawy trapezu prostokątnego mają długość 13 i 10, a kąt ostry przy podstawie ma miarę 60°. Oblicz długość ramienia pochyłego.

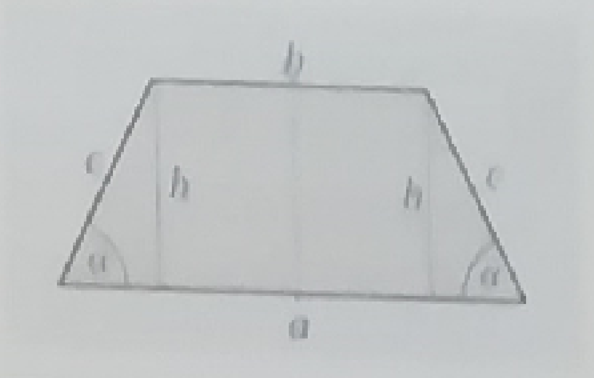
Ćwiczenie 357. Oblicz wysokość trapezu prostokątnego, jeśli kąt ostry w tym trapezie ma miarę 30°, a pochyłe ramię ma długość 8.

Ćwiczenie 358. Oblicz różnicę długości podstaw trapezu prostokątnego, jeśli ramię pochyłe ma długość 4, a sinus kąta ostrego jest równy $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

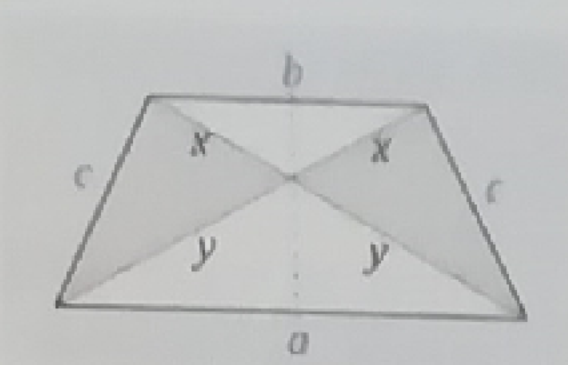
Ćwiczenie 359. Krótsze ramię trapezu prostokątnego ma długość 8, a podstawy mają długość 6 i 12. Oblicz długość krótszej przekątnej trapezu.

Trapez równoramienny ma dwa ramiona równej długości i jest symetryczny.

Trapez równoramienny ma **oś symetrii**. Wysokości wyprowadzone z końców krótszej podstawy odcinają przystające trójkąty prostokątne i pozostawiają prostokąt. **Oba kąty przy każdej z podstaw są równe** (kąty przy dłuższej podstawie są kątami ostrymi).

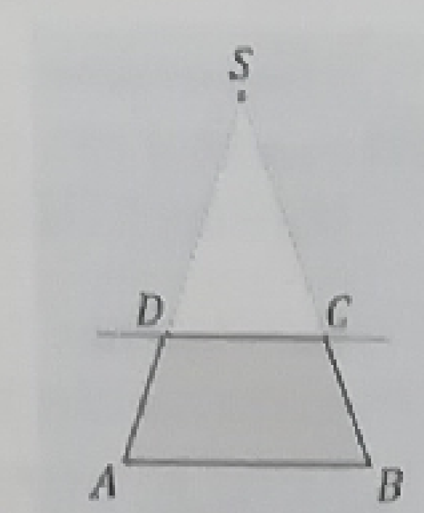


Przekątne trapezu równoramiennego przecinają się, wyznaczając cztery trójkąty. Dwa z nich są **przystające**, a dwa równoramienne i do siebie **podobne**.



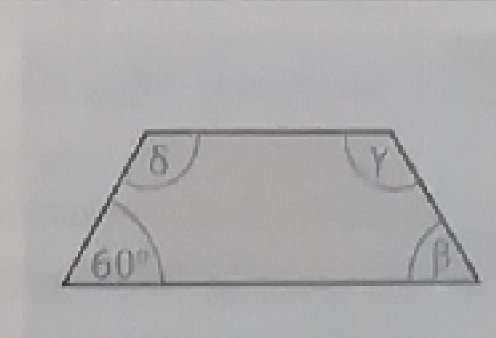
Trapez równoramienny *ABCD* można uważać za trójkąt równoramienny, od którego prostą równoległą do podstawy odcięto mniejszy trójkąt *CDS*; jeśli tak na niego spojrzymy, to przyda się umiejętność analizowania trójkątów podobnych.

Wszystkie te właściwości trapezu równoramiennego można w razie potrzeby wydedukować i wszystkie mogą się przydać.



Przykład 267. W trapezie równoramiennym kąt między dłuższą podstawą i ramieniem jest równy $\alpha = 60°$. Jakie są pozostałe kąty w tym trapezie?

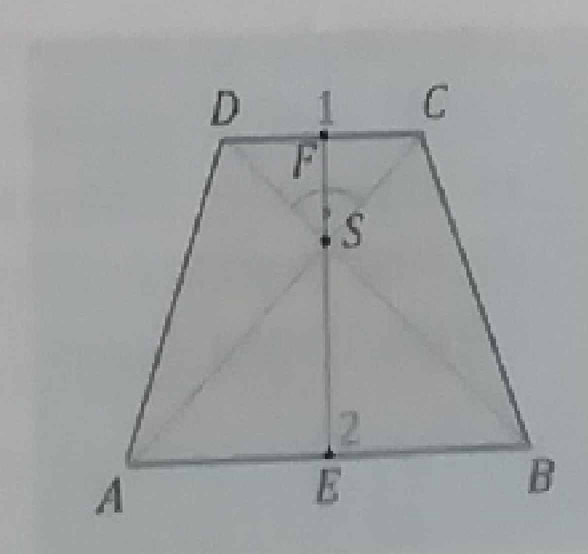
Rozwiązanie. Drugi kąt przy podstawie, β, też jest równy $60°$, bo to trapez równoramienny. Suma kątów przy każdym ramieniu jest równa $180°$, więc dwa pozostałe kąty w trapezie mają miary po $120°$.



■

Przykład 268. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 2 i 1, a przekątne przecinają się pod kątem prostym. Jaka jest wysokość trapezu?

Rozwiązanie. Sporządzamy rysunek i zaznaczamy wysokość przechodzącą przez punkt *S*. Szukana wysokość składa się z dwu odcinków, *ES* i *FS*.



Spróbujmy najpierw obliczyć długość odcinek *ES*. Przyglądamy się trójkątowi *ABS* i widzimy, że jest zarazem prostokątny i równoramienny — ma kształt **ekierki** 45-45-90. Odcinek *ES* dzieli go na dwie połówki, które też mają kształt ekierki. Zauważamy, że $|ES| = |AE|$, zaś $|AE|$ to przecież połowa z długości odcinka *AB*; stąd uzyskujemy: $|ES| = 1$.

Teraz należałoby znaleźć $|FS|$. Zauważamy, że trójkąt *CDS* jest podobny (ekierka 45-45-90) do trójkąta *ABS*, ale jego przeciwprostokątna jest dwa razy krótsza (odcinek *CD* ma długość 1, a nie 2, jak *AB*). Inne odcinki w *CDS* muszą być pomniejszone w tej samej skali, więc także wysokość *FS* musi być dwa razy krótsza niż *ES*. Zatem $|FS| = \frac{1}{2}$, a łącznie $h = |ES| + |FS| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. ■

Odpowiedź: wysokość trapezu *ABCD* jest równa $\frac{3}{2}$.