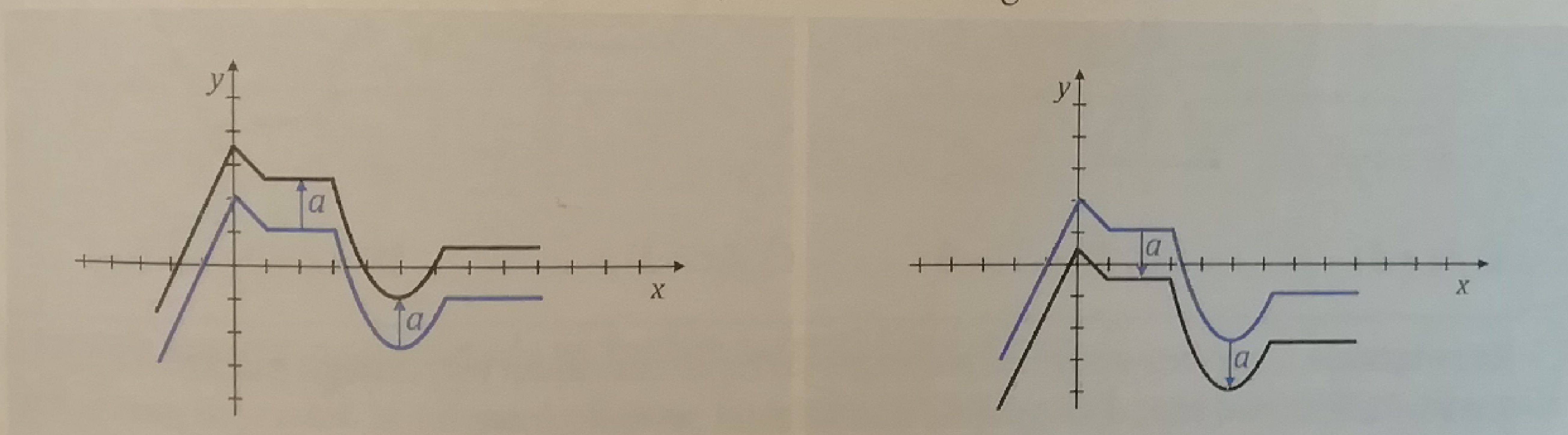
Proszę do 22 maja rozwiązać zaległe zadania. Przypominam że w każdą środę o godzinie 12.00 będą zamieszczane zadania na sprawdzian (dla chętnych) na ocenę dobrą lub bardzo dobrą. Rozwiązania zadań ze sprawdzianu należy wysłać najpóźniej do godziny 13.30 na adres e-mail kupkaandrzej@radymno.edu.pl

Przekształcenia wykresu funkcji

Jeśli do $f(x)$ dodamy jakieś a, to wykres przesunie się o a w górę, a jeśli od od $f(x)$ odejmiemy a, to wykres przesunie się o a w dół.

$$f(x) \to f(x)+a \qquad\qquad f(x) \to f(x)-a$$

Przy takim przekształceniu wykres ani trochę nie zmienia swego kształtu.



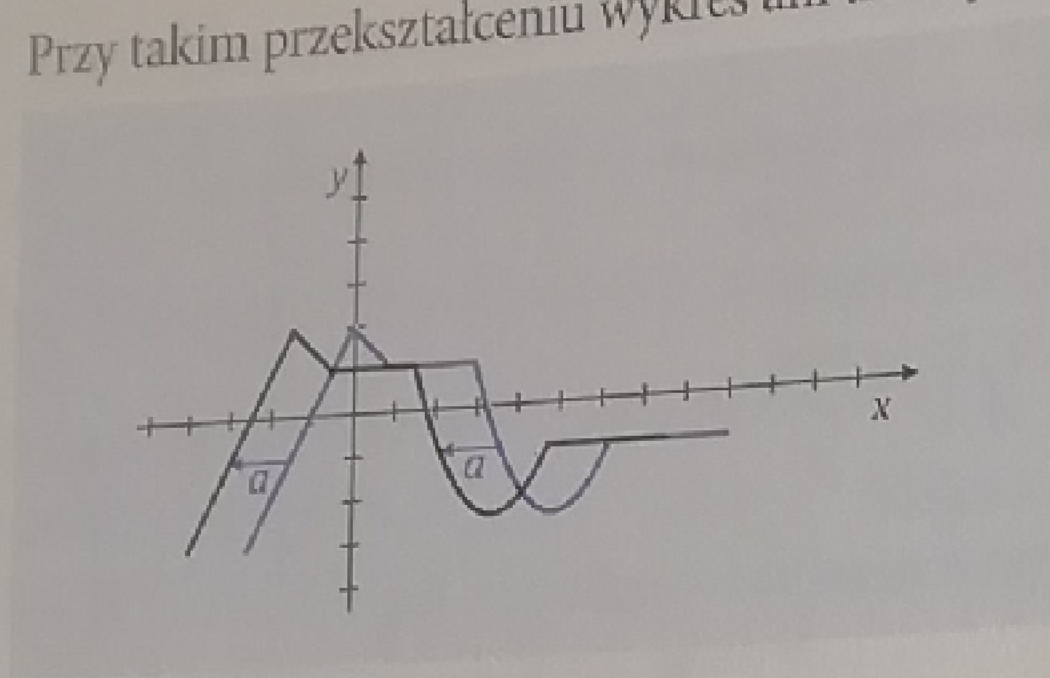
Zapamiętując podaną regułę zwykle się zastrzega, że a musi być dodatnie. Wtedy reguła jest najbardziej zrozumiała. Ale poprawna jest nawet dla ujemnych a, tylko kierunek ruchu jest wtedy niezgodny z intuicją.

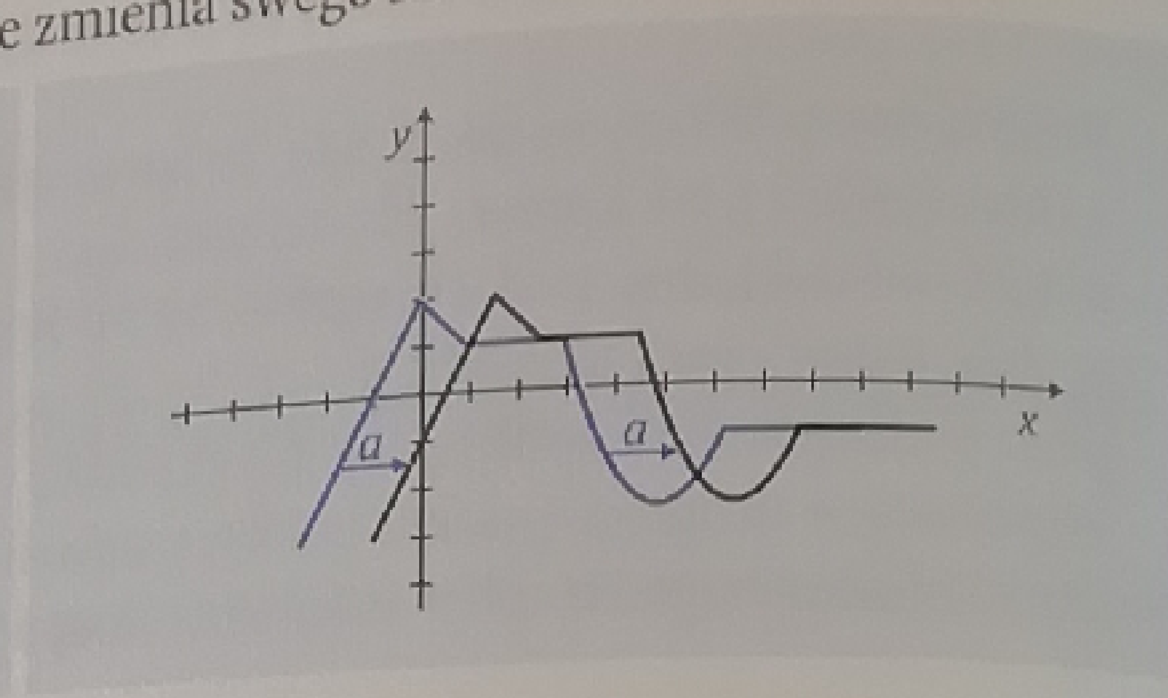
Jeśli zamiast x podstawimy $x + a$, to wykres przesunie się o a w lewo, a jeśli podstawimy $x - a$, to wykres przesunie się o a w prawo.

Dobrze tę regułę zapamiętaj, bo w tym przypadku o pomyłkę jest łatwo.

$$f(x) \to f(x+a) \qquad\qquad f(x) \to f(x-a)$$

Przy takim przekształceniu wykres ani trochę nie zmienia swego kształtu.

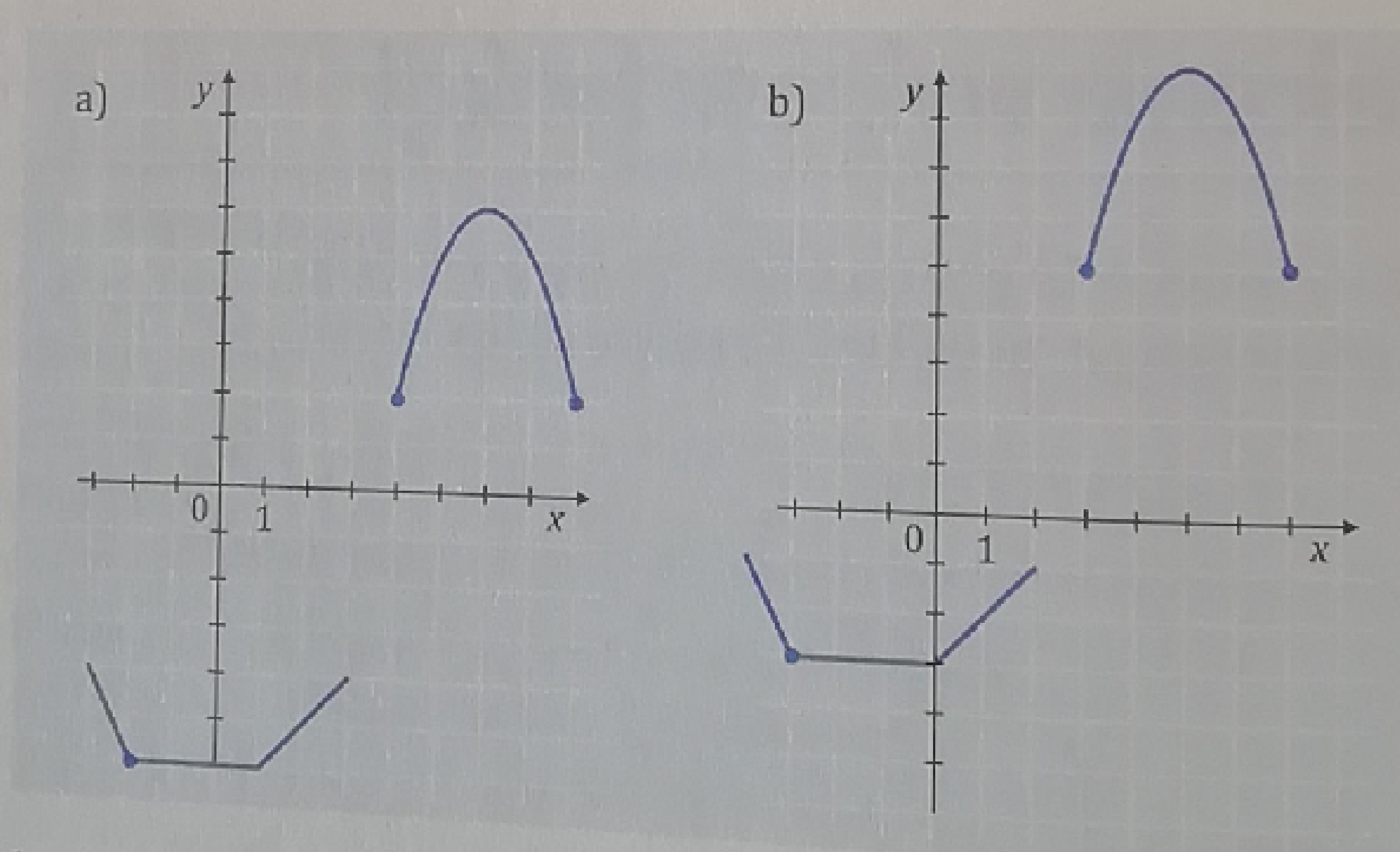




Jeśli masz rozpoznać, jak przesunął się wykres funkcji, wybierz jakiś charakterystyczny punkt wykresu i popatrz, co się z nim stało.

Bardzo typowe zadanie maturalne polega na tym, by do rysunku, na którym przedstawiono wykres przesunięty w nowe położenie, dobrać odpowiedni podpis ze wzorem zmodyfikowanej funkcji. Wykres może być skomplikowany, ale takie zadanie zazwyczaj jest bardzo łatwe.

Przykład 163. Na rysunku **a**) przedstawiono wykres funkcji f, a na rysunku **b**) przedstawiono wykres funkcji:



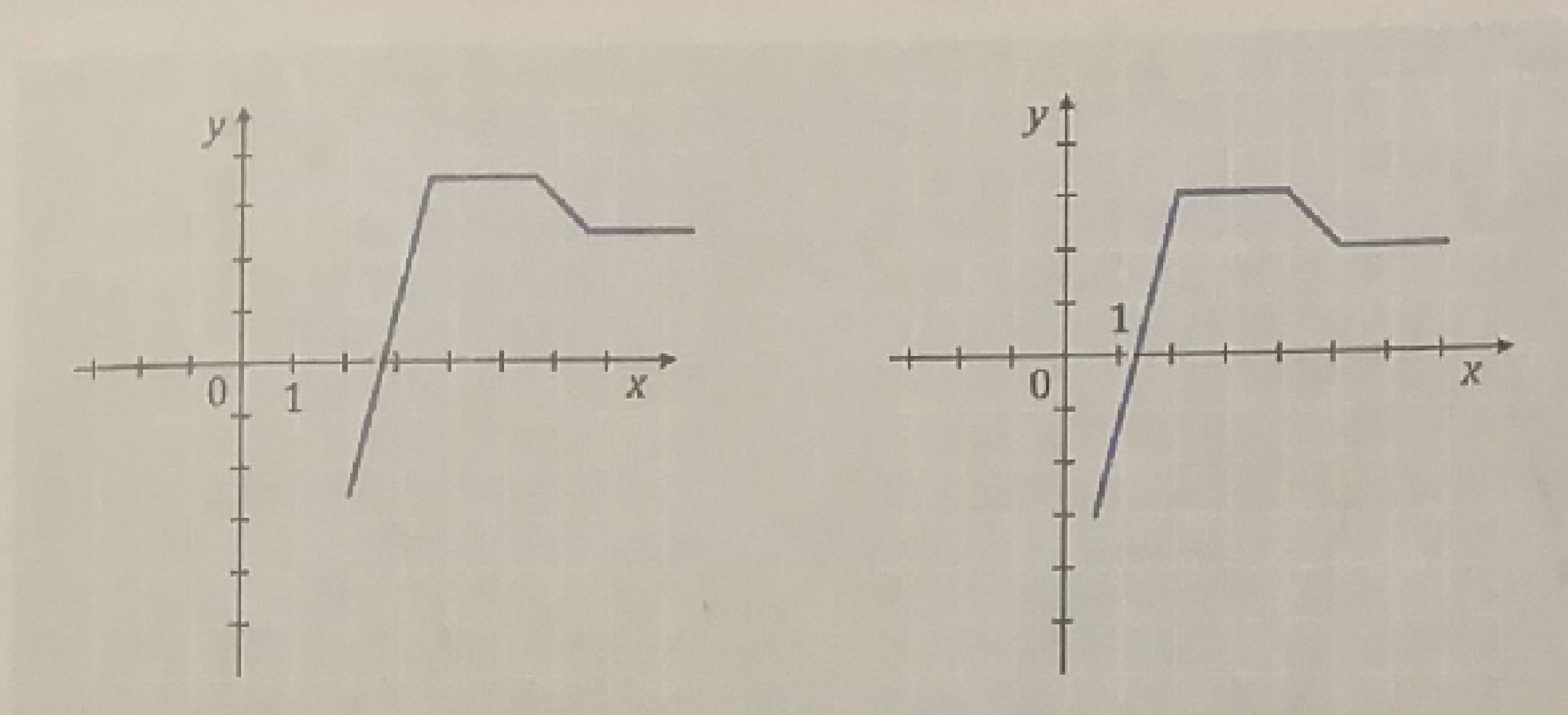
A) $f(x+3)-1$ B) $f(x+1)-3$ C) $f(x-3)+1$ D) $f(x+1)+3$.

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na położenie jakiegoś **charakterystycznego punktu**, na przykład tego, w którym pod kątem zbiegają się dwa odcinki prostoliniowe.

Na pierwszym wykresie współrzędne wybranego punktu to $(-2, -6)$, a na drugim wykresie $(-3, -3)$. Punkt z drugiego wykresu jest przesunięty względem pierwszego o 1 w **lewo** i 3 w **górę**. W takim razie **stawiamy hipotezę**, że cały drugi wykres otrzymano, przesuwając wykres pierwszy o 1 w lewo i 3 w górę. **Sprawdzamy tę hipotezę** dla newralgicznych punktów: dla końców poszczególnych odcinków prostoliniowych, dla punktu w którym funkcja nie jest określona oraz dla wierzchołka odcinka krzywoliniowego.

Okazuje się, że wszystkie przesunęły się identycznie, co potwierdza naszą hipotezę. Aby wykres funkcji f przesunął się o 1 w lewo, musieliśmy sporządzić wykres $f(x + 1)$, a po to, by ten przesunął się w górę o 3, musieliśmy sporządzić wykres funkcji $f(x + 1) + 3$. Zakreślamy odpowiedź **D**.

Ćwiczenie 168. Na pierwszym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x)$, a na drugim wykres funkcji:



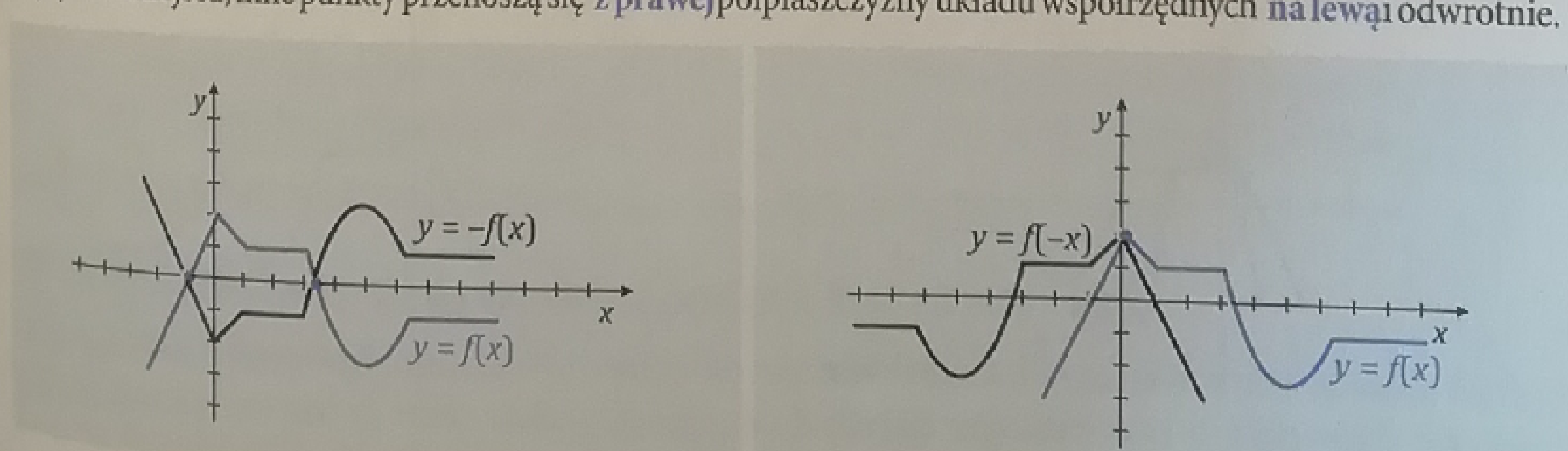
A) $f(x - 0{,}5) + 0{,}5$ B) $f(x + 0{,}5) - 1{,}5$ C) $f(x + 1{,}5) - 0{,}5$ D) $f(x - 1{,}5) + 1{,}5$.

- **Zmiana $f(x)$ na $-f(x)$ odpowiada odwróceniu wykresu do góry nogami.**
  Miejsca zerowe funkcji pozostają na miejscu.

Mówiąc ściślej, efekt jest taki, jakbyśmy wykonali **symetrię osiową** o osi Ox, czyli odbicie symetryczne wykresu względem osi Ox, kiedy każdy punkt o współrzędnych (x, y) przechodzi na punkt o współrzędnych $(x, -y)$. Wszystkie punkty osi Ox pozostają przy tym na miejscu, a inne punkty przenoszą się z górnej półpłaszczyzny układu współrzędnych do dolnej i odwrotnie. Symetrię osiową omawiamy na s. 229.

- **Zmiana $f(x)$ na $f(-x)$ odpowiada odbiciu wykresu w osi Oy jak w lustrze.**
  Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Oy pozostaje na miejscu.

Mówiąc ściślej, efekt jest taki, jakbyśmy wykonali **symetrię osiową**, czyli odbicie symetryczne wykresu względem osi Oy, kiedy każdy punkt o współrzędnych (x, y) przechodzi na punkt o współrzędnych $(-x, y)$. Punkty osi Oy pozostają przy tym na miejscu, inne punkty przenoszą się **z prawej** półpłaszczyzny układu współrzędnych **na lewą** i odwrotnie.



- **Na poziomie rozszerzonym definiuje się funkcje parzyste i nieparzyste.**

Te pojęcia mogą się przydać, by rozumieć polecenia w niektórych zbiorach zadań. Funkcja parzysta f to taka, która spełnia warunek $f(x) = f(-x)$, a jej wykres jest symetryczny względem osi Oy. Funkcją parzystą jest na przykład funkcja $f(x) = x^2$. Funkcja nieparzysta f to taka, która spełnia warunek $f(x) = -f(-x)$. Wykres takiej funkcji nie zmieni się, jeśli wykonamy symetrię środkową o środku w początku układu współrzędnych. Przykładem funkcji nieparzystej jest $f(x) = x^3$.

- **Zmiana $f(x)$ na $af(x)$ odpowiada rozciągnięciu wykresu w pionie, jeśli $a > 1$.**

Takie przekształcenie jest wymagane na poziomie rozszerzonym. Na poziomie podstawowym nie może być egzekwowane, ale może się przydać przy rozwiązywaniu zadań.