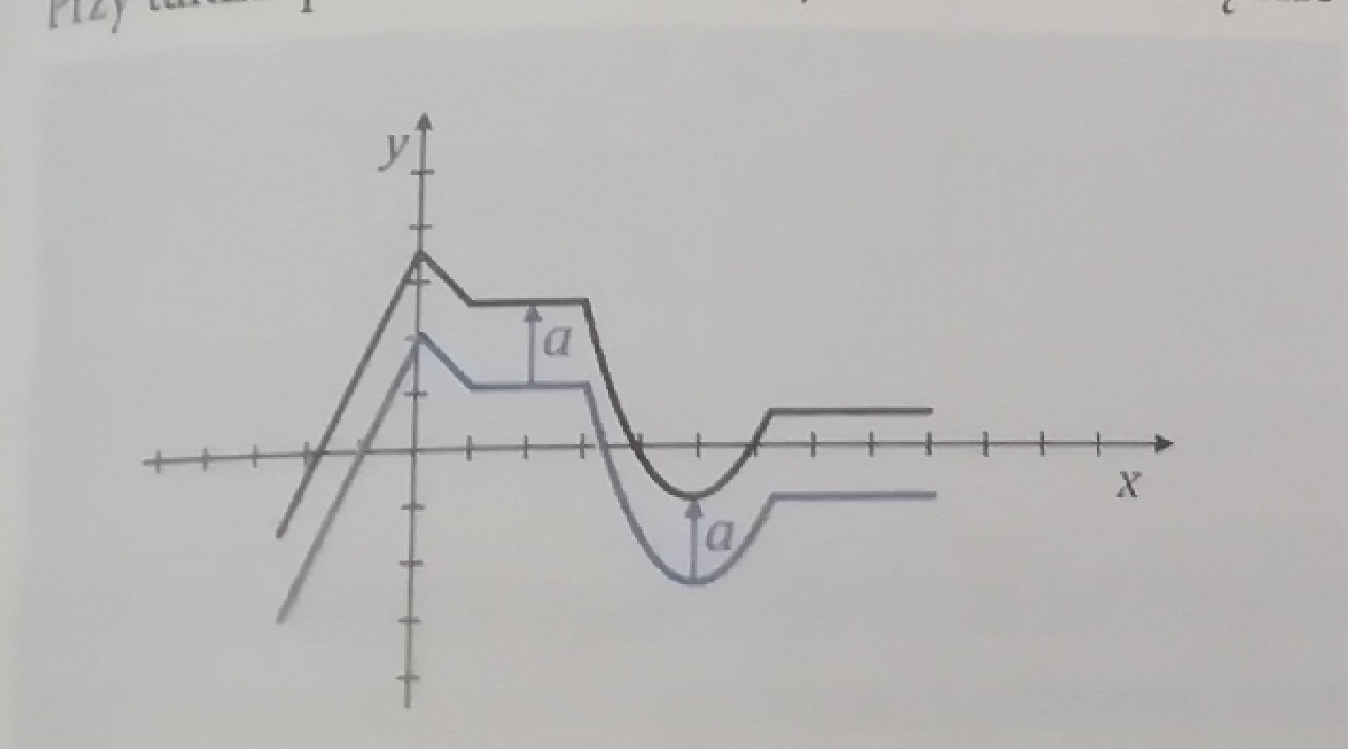
Proszę rozwiązać ćwiczenia ze zdjęć i zaległe zadania z poprzednich tygodni. Uczniom którzy nie wysyłają zadań grozi ocena niedostateczna lub nieklasyfikowanie na koniec roku szkolnego. Przypominam że w każdą środę o godzinie 12.00 będą zamieszczane zadania (dla chętnych) na ocenę dobrą lub bardzo dobrą. Od 1 czerwca możliwe są konsultacje indywidualne w szkole. Zapisy na konsultacje za pośrednictwem wychowawców klas.

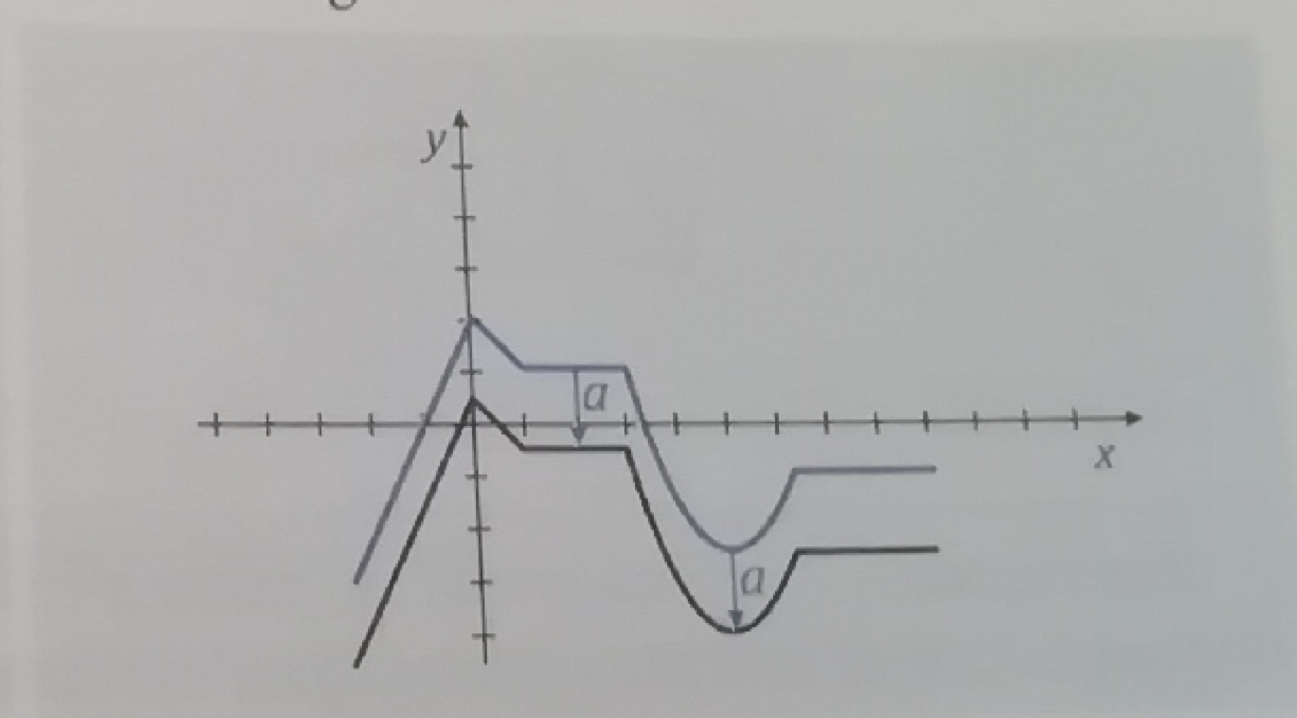
Przekształcenia wykresu funkcji

Jeśli do $f(x)$ dodamy jakieś a, to wykres przesunie się o a w górę, a jeśli od od $f(x)$ odejmiemy a, to wykres przesunie się o a w dół.

$$f(x) \to f(x) + a \qquad\qquad f(x) \to f(x) - a$$

Przy takim przekształceniu wykres ani trochę nie zmienia swego kształtu.





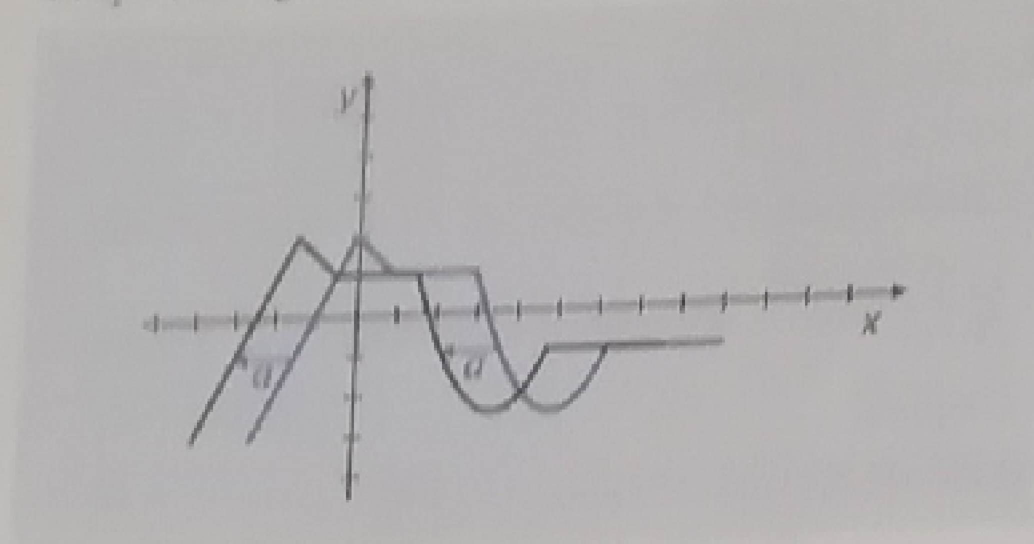
Zapamiętując podaną regułę zwykle się zastrzega, że a musi być dodatnie. Wtedy reguła jest najbardziej zrozumiała. Ale poprawna jest nawet dla ujemnych a, tylko kierunek ruchu jest wtedy niezgodny z intuicją.

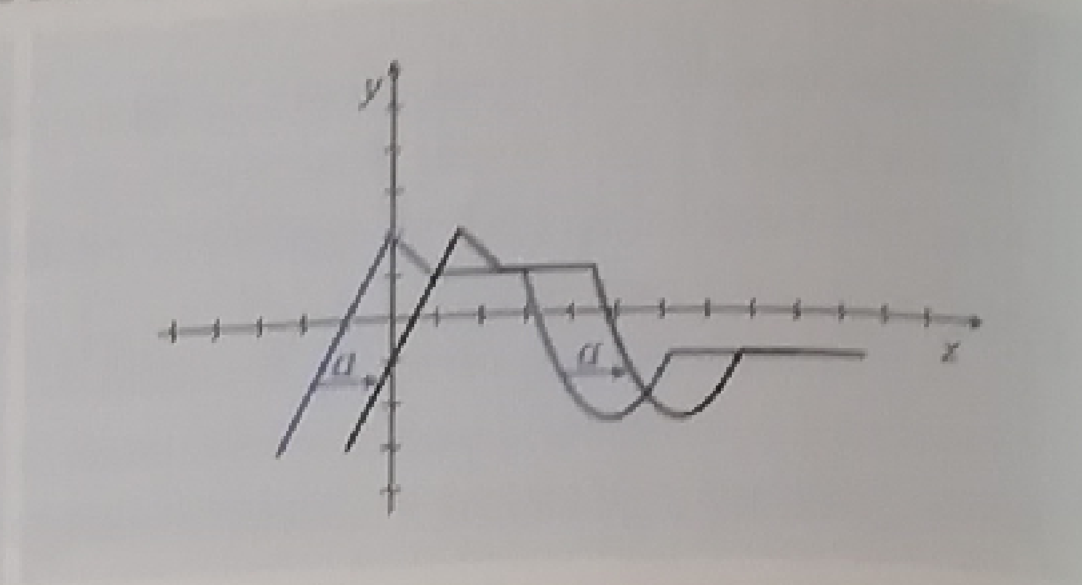
Jeśli zamiast x podstawimy $x + a$, to wykres przesunie się o a w lewo, a jeśli podstawimy $x - a$, to wykres przesunie się o a w prawo.

Dobrze tę regułę zapamiętaj, bo w tym przypadku o pomyłkę jest łatwo.

$$f(x) \to f(x+a) \qquad f(x) \to f(x-a)$$

Przy takim przekształceniu wykres ani trochę nie zmienia swego kształtu.

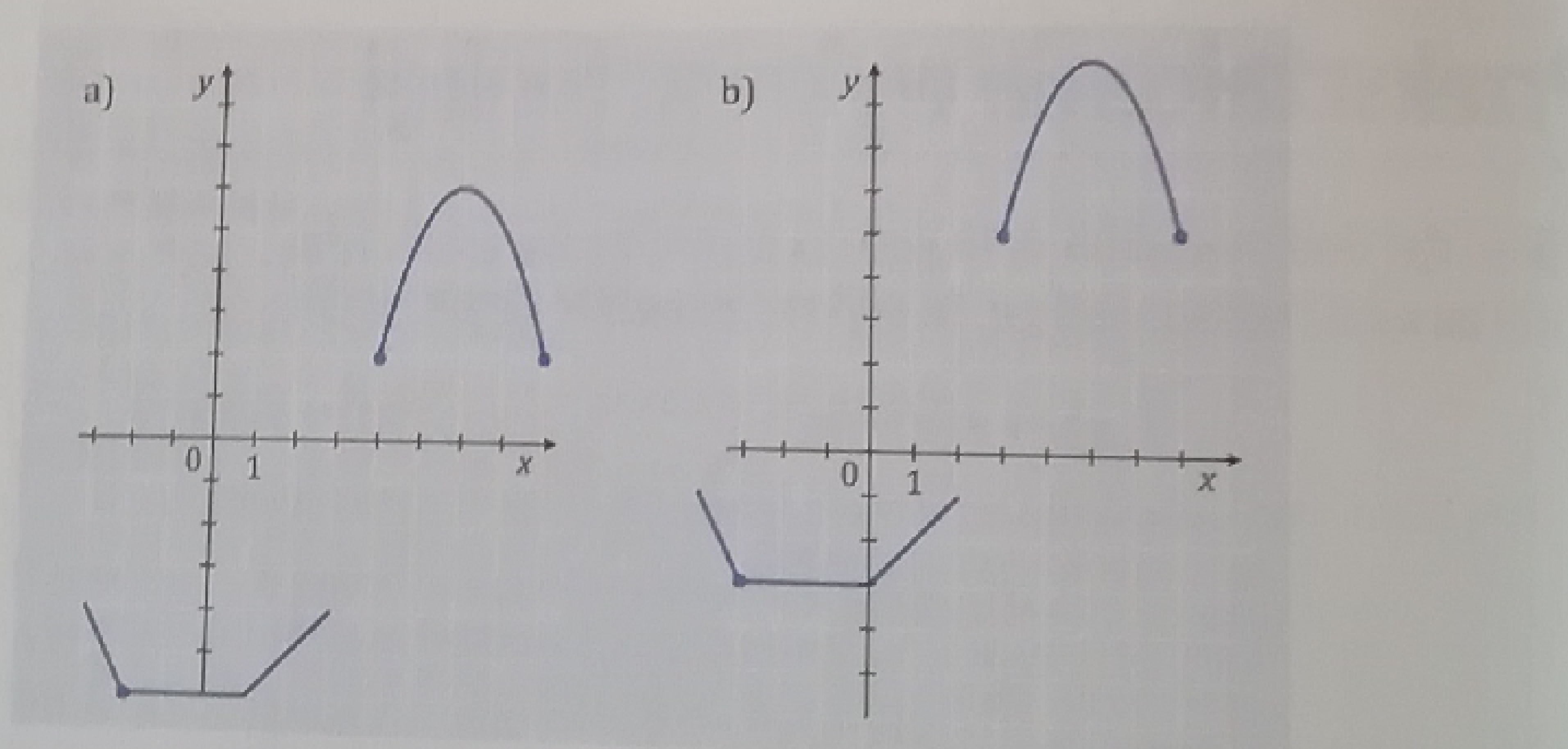




Jeśli masz rozpoznać, jak przesunął się wykres funkcji, wybierz jakiś charakterystyczny punkt wykresu i popatrz, co się z nim stało.

Bardzo typowe zadanie maturalne polega na tym, by do rysunku, na którym przedstawiono wykres przesunięty w nowe położenie, dobrać odpowiedni podpis ze wzorem zmodyfikowanej funkcji. Wykres może być skomplikowany, ale takie zadanie zazwyczaj jest bardzo łatwe.

Przykład 163. Na rysunku **a)** przedstawiono wykres funkcji f, a na rysunku **b)** przedstawiono wykres funkcji:



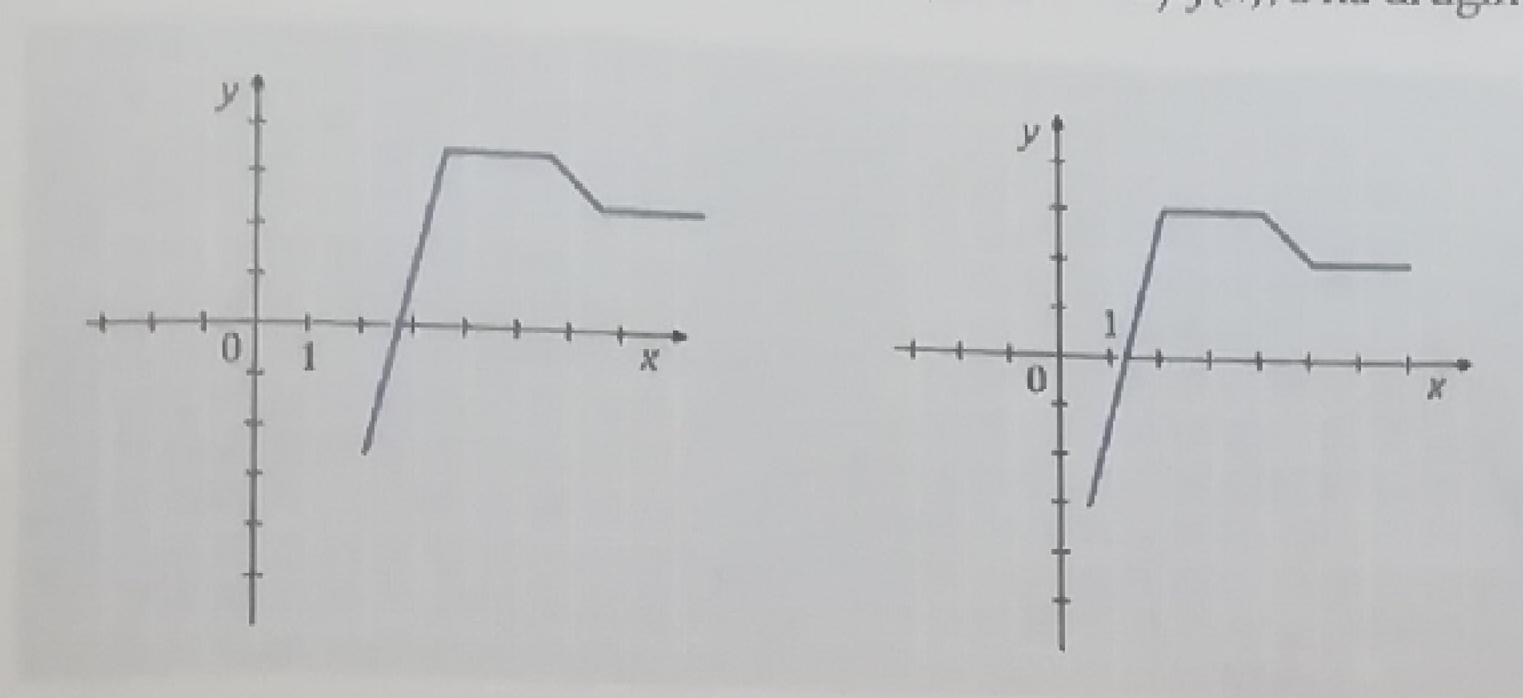
A) $f(x+3)-1$ B) $f(x+1)-3$ C) $f(x-3)+1$ D) $f(x+1)+3$.

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na położenie jakiegoś **charakterystycznego punktu**, na przykład tego, w którym pod kątem zbiegają się dwa odcinki prostoliniowe.

Na pierwszym wykresie współrzędne wybranego punktu to $(-2, -6)$, a na drugim wykresie $(-3, -3)$. Punkt z drugiego wykresu jest przesunięty względem pierwszego o 1 w **lewo** i 3 w **górę**. W takim razie **stawiamy hipotezę**, że cały drugi wykres otrzymano, przesuwając wykres pierwszy o 1 w lewo i 3 w górę. **Sprawdzamy tę hipotezę** dla newralgicznych punktów: dla końców poszczególnych odcinków prostoliniowych, dla punktu w którym funkcja nie jest określona oraz dla wierzchołka odcinka krzywoliniowego.

Okazuje się, że wszystkie przesunęły się identycznie, co potwierdza naszą hipotezę. Aby wykres funkcji f przesunął się o 1 w lewo, musieliśmy sporządzić wykres $f(x+1)$, a po to, by ten przesunął się w górę o 3, musieliśmy sporządzić wykres funkcji $f(x+1)+3$. Zakreślamy odpowiedź **D**.

Ćwiczenie 168. Na pierwszym rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x)$, a na drugim wykres funkcji:



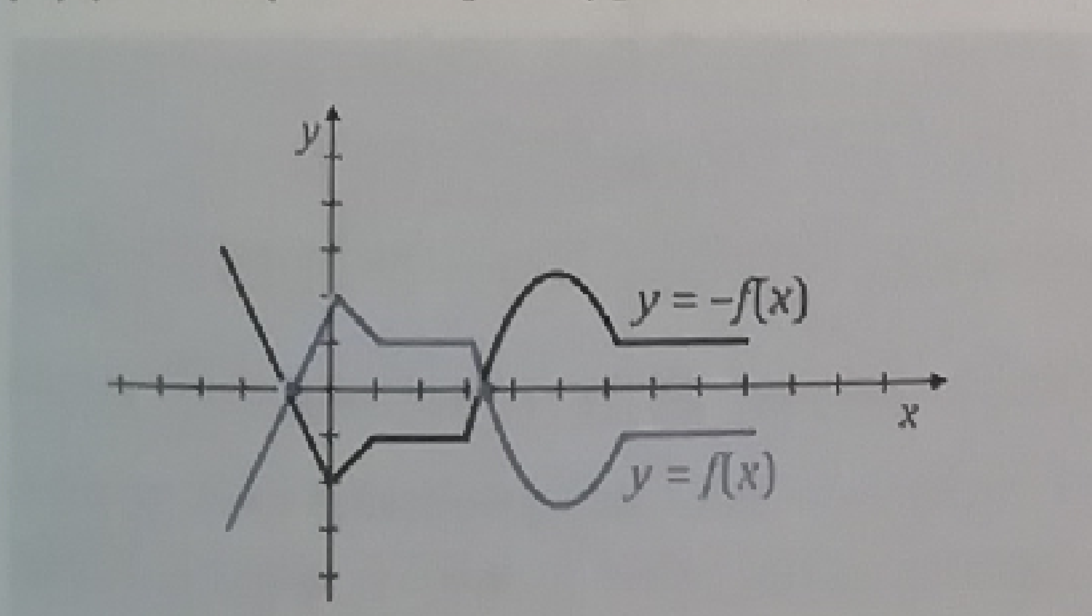
A) $f(x-0{,}5)+0{,}5$ **B)** $f(x+0{,}5)-1{,}5$ **C)** $f(x+1{,}5)-0{,}5$ **D)** $f(x-1{,}5)+1{,}5$.

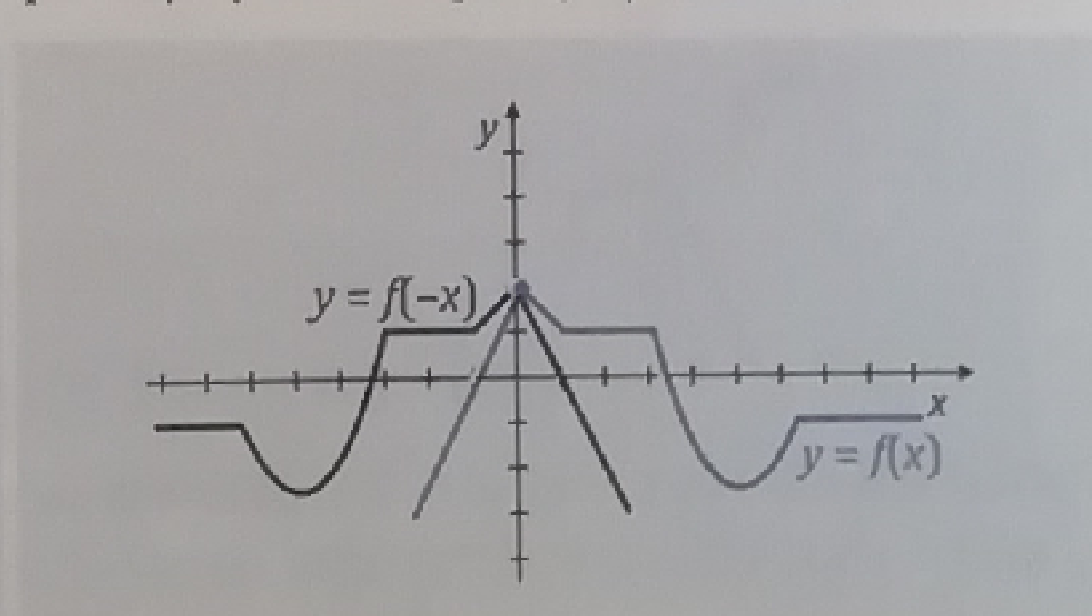
- **Zmiana $f(x)$ na $-f(x)$ odpowiada odwróceniu wykresu do góry nogami. Miejsca zerowe funkcji pozostają na miejscu.**

Mówiąc ściślej, efekt jest taki, jakbyśmy wykonali symetrię osiową o osi Ox, czyli odbicie symetryczne wykresu względem osi Ox, kiedy każdy punkt o współrzędnych (x, y) przechodzi na punkt o współrzędnych $(x, -y)$. Wszystkie punkty osi Ox pozostają przy tym na miejscu, a inne punkty przenoszą się z górnej półpłaszczyzny układu współrzędnych do dolnej i odwrotnie. Symetrię osiową omawiamy na s. 229.

- **Zmiana $f(x)$ na $f(-x)$ odpowiada odbiciu wykresu w osi Oy jak w lustrze. Punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Oy pozostaje na miejscu.**

Mówiąc ściślej, efekt jest taki, jakbyśmy wykonali symetrię osiową, czyli odbicie symetryczne wykresu względem osi Oy, kiedy każdy punkt o współrzędnych (x, y) przechodzi na punkt o współrzędnych $(-x, y)$. Punkty osi Oy pozostają przy tym na miejscu, inne punkty przenoszą się z prawej półpłaszczyzny układu współrzędnych na lewą i odwrotnie.





- **Na poziomie rozszerzonym definiuje się funkcje parzyste i nieparzyste.**

Te pojęcia mogą się przydać, by rozumieć polecenia w niektórych zbiorach zadań. Funkcja parzysta f to taka, która spełnia warunek $f(x)=f(-x)$, a jej wykres jest symetryczny względem osi Oy. Funkcją parzystą jest na przykład funkcja $f(x)=x^2$. Funkcja nieparzysta f to taka, która spełnia warunek $f(x)=-f(-x)$. Wykres takiej funkcji nie zmieni się, jeśli wykonamy symetrię środkową o środku w początku układu współrzędnych. Przykładem funkcji nieparzystej jest $f(x)=x^3$.

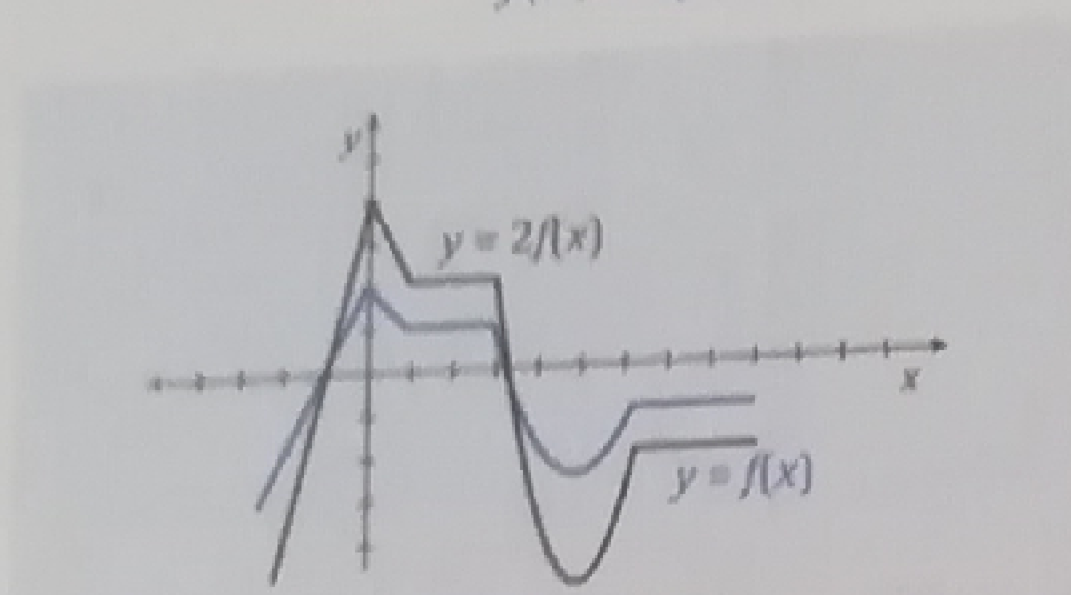
- **Zmiana $f(x)$ na $af(x)$ odpowiada rozciągnięciu wykresu w pionie, jeśli $a>1$.**

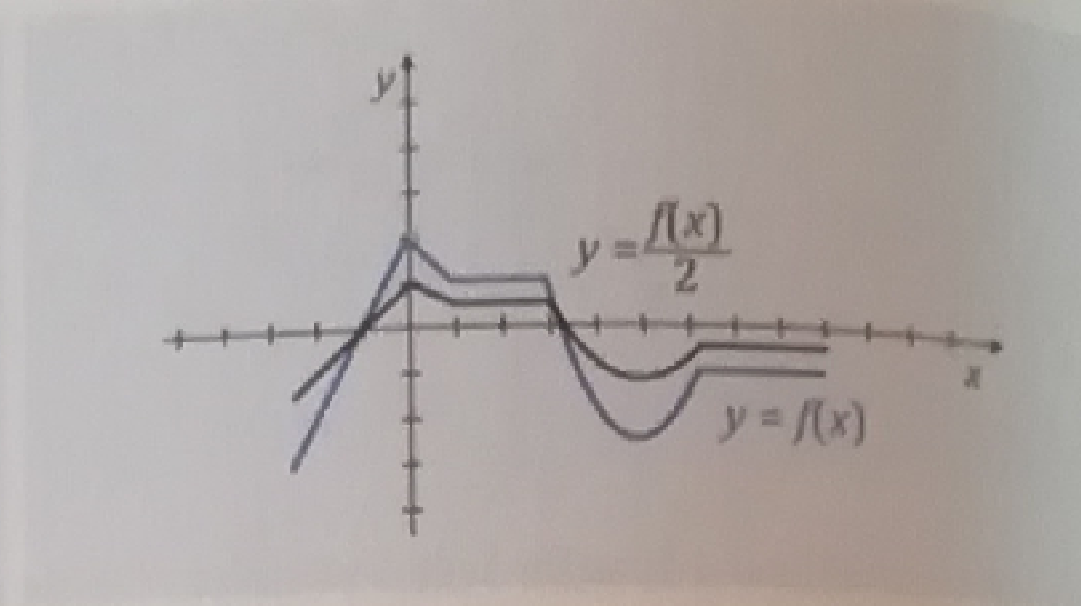
Takie przekształcenie jest wymagane na poziomie rozszerzonym. Na poziomie podstawowym nie może być egzekwowane, ale może się przydać przy rozwiązywaniu zadań.

Wszystkie punkty osi Ox pozostają na miejscu (**miejsca zerowe** funkcji nie zmieniają położenia), a inne punkty przenoszą się, oddalając a-krotnie od tej osi (dla $a > 1$). Na przykład jeśli $a = 3$, to wykres staje się 3 razy „wyższy" niż był, a jeśli $a = 10$, to rozciąga się w pionie 10 razy. Jeśli byłoby $a = 1$, to wykres by się nie zmienił, jeśli $0 < a < 1$, to wykres ulega „ściśnięciu" w pionie i zbliża się do osi Ox. Gdyby zachodziło $a < 0$, to prócz rozciągnięcia (albo ściśnięcia) wykresu nastąpiłoby jego odbicie w osi Ox (odwrócenie do góry nogami).

Analogicznie, jeśli zamienimy $f(x)$ na $\frac{1}{a}f(x)$, gdzie $a > 0$, to wykres ulega a-krotnemu **ściśnięciu w pionie**.

$$f(x) \to af(x) \qquad\qquad f(x) \to \frac{1}{a}f(x)$$



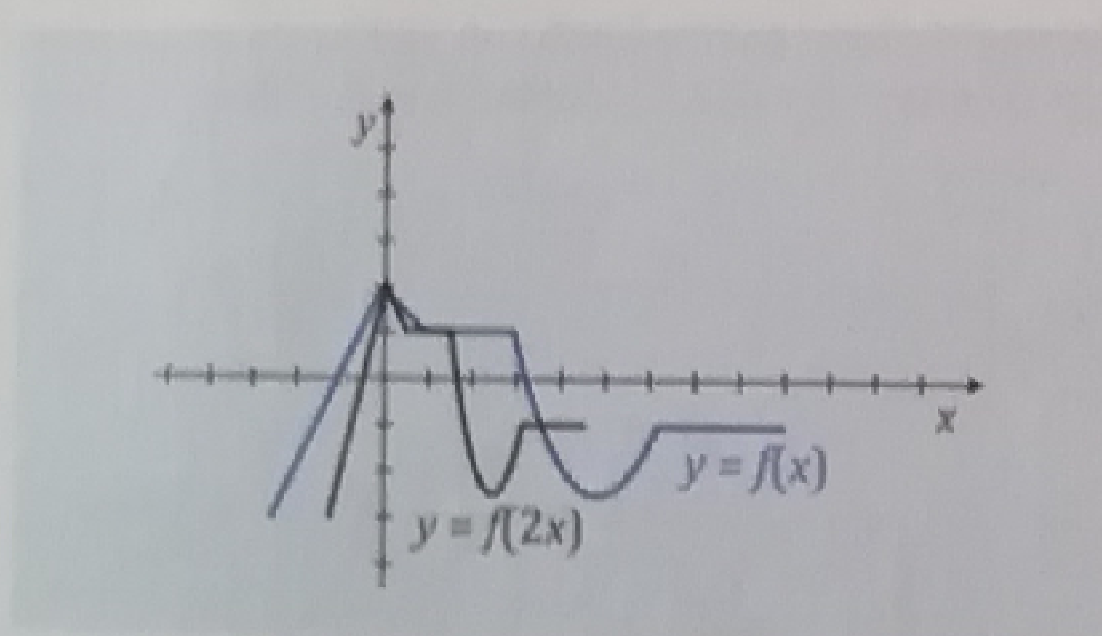


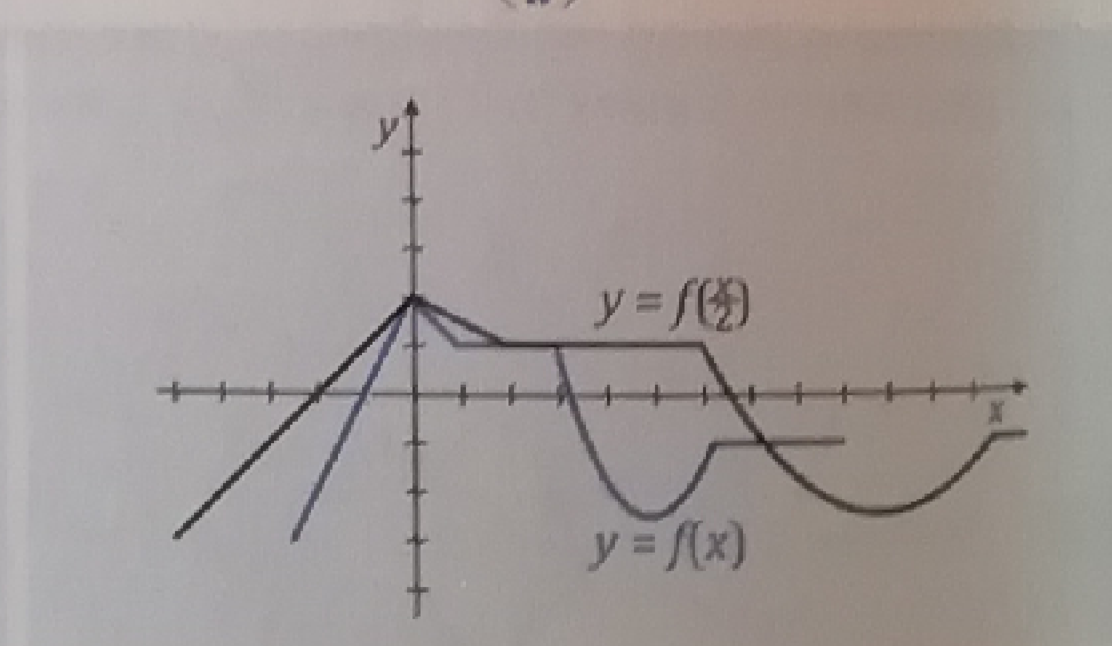
- **Zmiana $f(x)$ na $f(ax)$ odpowiada ściśnięciu wykresu w poziomie, jeśli $a > 1$.**

Takie przekształcenie jest wymagane na poziomie rozszerzonym, ale i na poziomie podstawowym warto wiedzieć, jak wpływa ono na wykres funkcji. Otóż punkt przecięcia wykresu z osią Oy pozostaje na miejscu, a inne punkty przenoszą się, zbliżając się a-krotnie do tej osi (dla $a > 1$). Wykres, który był szeroki, staje się wąski. Jeśli byłoby $a = 1$, to wykres by się nie zmienił, a jeśli $0 < a < 1$, to uległby „rozciągnięciu" (stałby się szerszy). Gdyby zachodziło $a < 0$, to prócz rozciągnięcia (albo ściśnięcia) wykresu nastąpiłoby jego odbicie w osi Oy jak w lustrze (zamiana lewej strony z prawą).

Analogicznie, jeśli zamienimy $f(x)$ na $f\left(\frac{x}{a}\right)$, to wykres ulega a-krotnemu **rozciągnięciu w poziomie**, bez ruszania punktu przecięcia wykresu z osią Oy.

$$f(x) \to f(ax) \qquad\qquad f(x) \to f\left(\frac{x}{a}\right)$$





Linia prosta na płaszczyźnie

Wykres funkcji liniowej jest linią prostą.

$$y = ax + b$$

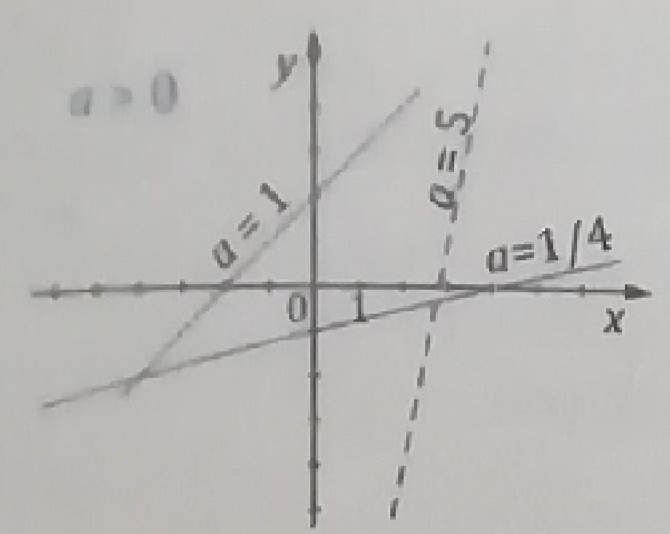
Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

Liczbę b nazywamy **wyrazem wolnym**.

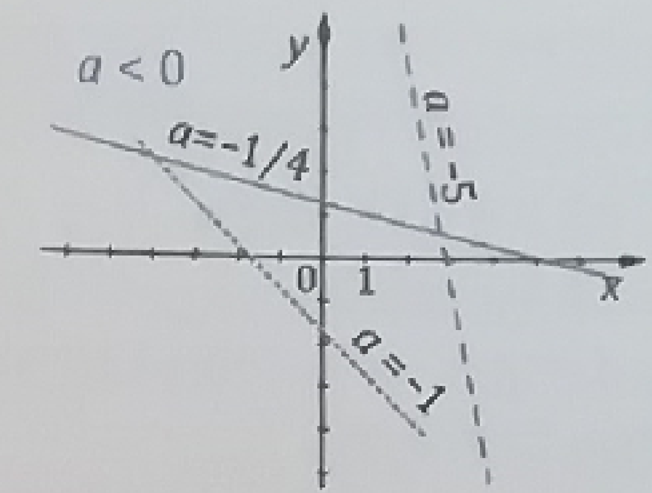
Każde wyrażenie, które da się sprowadzić do postaci $y = ax + b$, przedstawia funkcję liniową.

Położenie prostej zależy od współczynników *a* i *b*.

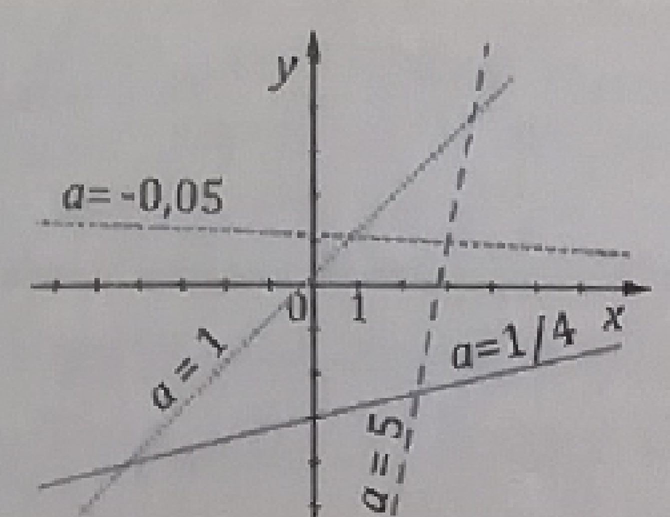
Poniższe właściwości funkcji liniowej musisz doskonale rozumieć. Nie pamiętać, ale właśnie rozumieć.



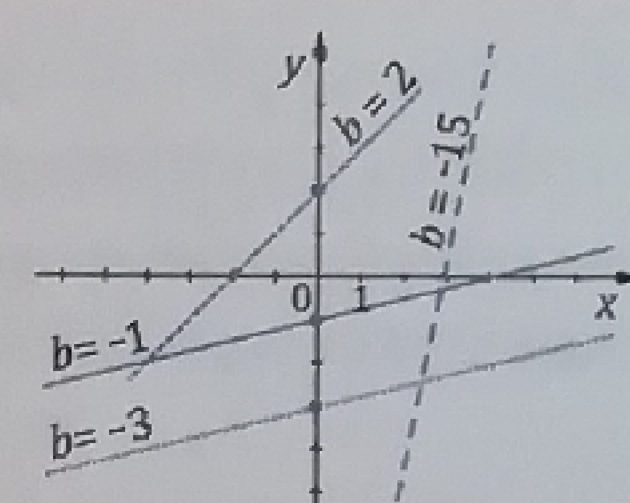
Jeśli a jest dodatnie ($a > 0$),
to funkcja jest rosnąca



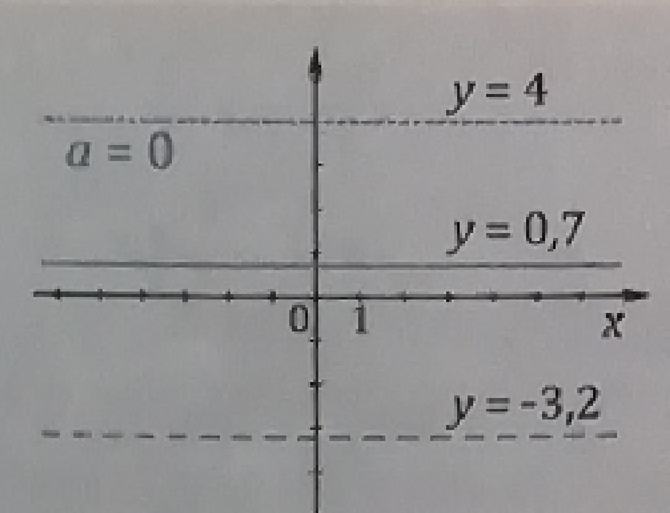
Jeśli a jest ujemne ($a < 0$),
to funkcja jest malejąca



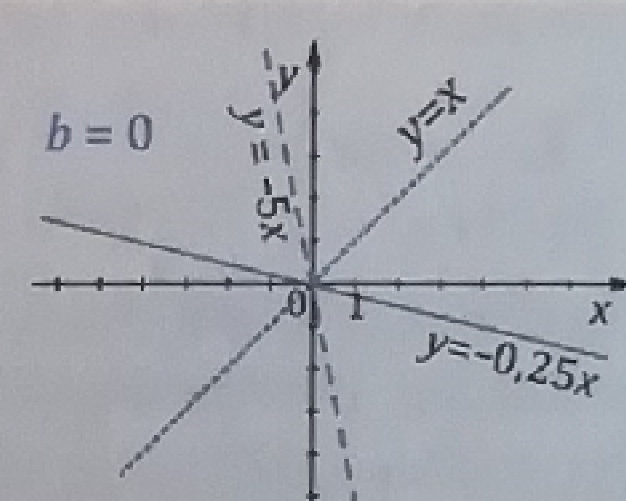
Im większe a, tym bardziej stromo nachylona jest prosta[a]



Im większe b, tym wyżej prosta przecina oś Oy



Jeśli $a = 0$, to funkcja jest stała,
a wykres jest prostą równoległą do osi Ox



Jeśli $b = 0$, to wykres jest linią prostą,
która przechodzi przez punkt (0, 0)

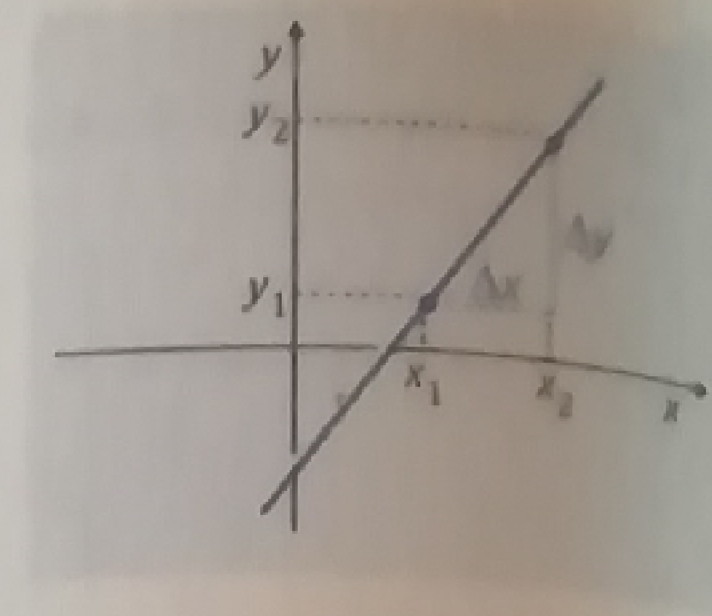
[a] Ściślej byśmy powiedzieli, że chodzi nie tyle o a, co o jej wartość bezwzględną.

Za pomocą funkcji liniowej nie da się opisać prostych pionowych.

Proste pionowe (**równoległe do osi Oy**) opisywane są równaniem $x = a$, ale nie jest to wzór funkcji liniowej. Zresztą, nie jest to wzór żadnej funkcji, bo jednemu argumentowi x odpowiada nieskończenie wiele wartości y.

Współczynnik kierunkowy prostej można zdefiniować wzorem:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



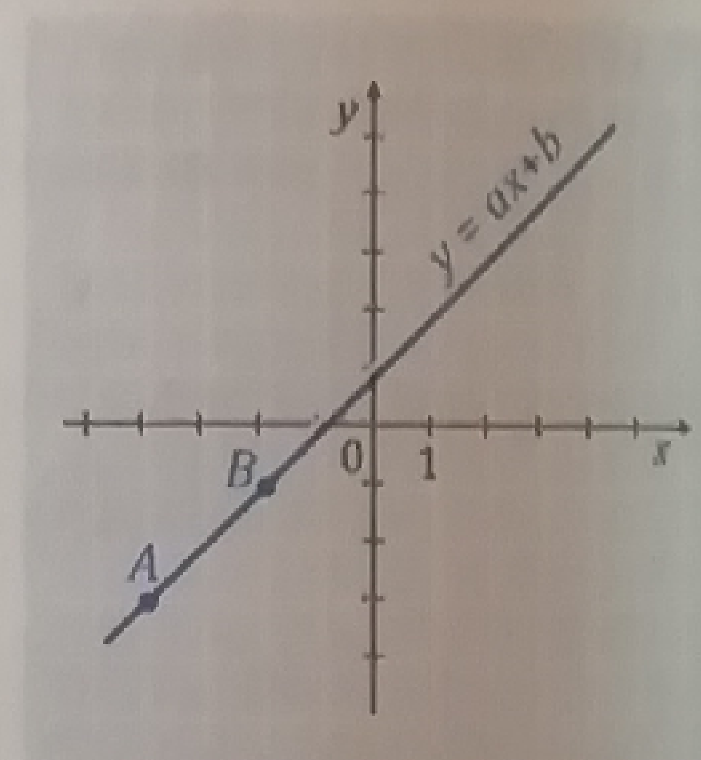
Współczynnik kierunkowy wyraża **nachylenie prostej** względem osi Ox. Nachylenie to jest tym większe, im bardziej zmienia się y na jakimś odcinku długości Δx. Nie ma znaczenia, czy weźmiemy mały, czy duży odcinek Δx: linia prosta ma jednakowe nachylenie na całym swym przebiegu (gdyby miała zmienne nachylenie, to by była krzywą, a nie prostą).

Współczynnik kierunkowy jest poza tym tangensem kąta nachylenia prostej do osi Ox, $a = \operatorname{tg}\alpha$, ale to musisz koniecznie wiedzieć tylko na poziomie rozszerzonym (por. s. 263).

Gdy wyznaczasz równanie prostej ze współrzędnych dwóch punktów, wyznacz a z $\Delta y/\Delta x$, a potem do równania prostej dopasuj b.

W zadaniu możesz mieć podane współrzędne dwóch punktów, na przykład A i B, przez które przechodzi prosta. Możesz też mieć narysowany wykres — wtedy możesz sobie **wybrać dwa punkty** na prostej i odczytać ich współrzędne.

Przykład 164. Prosta przechodzi przez punkty $A = (-4, -3)$ oraz $B = (-2, -1)$. Napisz równanie tej prostej.



Rozwiązanie. Zakładamy, że równanie prostej ma postać $y = ax + b$. Najpierw znajdziemy współczynnik kierunkowy a. Jako pierwszy punkt wybierzemy A, a jako drugi B (moglibyśmy wybrać odwrotnie, wynik byłby ten sam):

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(-1)-(-3)}{(-2)-(-4)} = \frac{-1+3}{-2+4} = \frac{2}{2} = 1$$

Zauważ, że podstawiając ujemne współrzędne, **nie żałowaliśmy nawiasów** aby uniknąć pomyłek. Tobie radzimy postępować tak samo!

Wiemy już, że $a = 1$, więc równanie prostej ma postać $y = 1 \cdot x + b$ i że taka prosta przechodzi przez punkty A oraz B. Współrzędne dowolnego z tych punktów możemy więc podstawić do tego równania i musi ono być spełnione. Zajmijmy się warunkiem przechodzenia przez punkt $A = (-4, -3)$:

$y_A = 1 \cdot x_A + b$, czyli $-3 = 1 \cdot (-4) + b$, skąd znajdziemy $b = 1$.

Gdybyśmy woleli zająć się przechodzeniem prostej przez punkt $B = (-2, -1)$, napisalibyśmy:

$y_B = 1 \cdot x_B + b$, czyli $-1 = 1 \cdot (-2) + b$, skąd też dostalibyśmy $b = 1$.

Odpowiedź: szukana prosta ma równanie $y = x + 1$.

Ćwiczenie 169. Dane są trzy punkty: $A = (-5, 2)$, $B = (-4, -1)$, $C = (-1, 2)$. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkty:

a) A i B, b) B i C, c) C i A.

- **Możesz zapamiętać gotowy wzór na prostą przechodzącą przez dwa różne punkty:**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

W tym wzorze występują dwie zmienne, x i y i musimy zakładać $x_2 \neq x_1$. Gdy już podstawisz znane x_1, y_1, x_2 i y_2 możesz ten wzór przekształcić do standardowej postaci typu $y = ax + b$. Nie wydaje nam się, aby pamiętanie gotowego