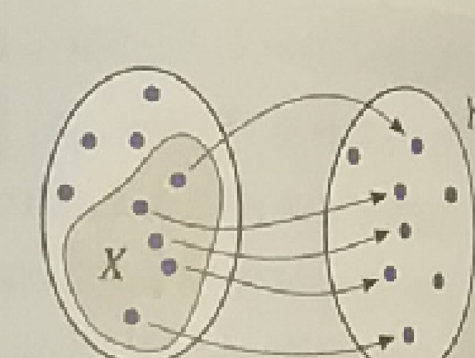
Proszę rozwiązać ćwiczenia 158-160 i zaległe zadania do 24 maja. Od 1 czerwca możliwe będą konsultacje indywidualne w szkole. Chętnych proszę o zapisy za pośrednictwem wychowawcy klasy. W związku z kończącym się rokiem szkolnym proszę o rozwiązywanie zaległych zadań z poprzednich tygodni nauczania zdalnego.

Funkcje i wykresy

Funkcje

O funkcji mówimy wtedy, gdy każdemu elementowi ze zbioru *X* odpowiada jakiś element zbioru *Y*.

Inaczej: funkcja to **przekształcenie** zbioru X w zbiór Y, co zapisujemy w postaci $f(x) = y$, gdzie $x \in X$, $y \in Y$. Czasami stosuje się zapis $f: X \rightarrow Y$, ale na maturze nie będzie on wymagany (może się pojawić w zbiorze zadań).



y odpowiadające jakiemuś x nazywamy wartością funkcji f w punkcie x albo wartością funkcji f dla argumentu x. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy $f(x)$.

Funkcję można wskazać na różne sposoby, na przykład za pomocą opisu słownego, tabelki, grafu, wzoru matematycznego, wykresu.

Pojęcie funkcji jest bardzo szerokie, ale najczęściej rozważamy funkcje liczbowe.

X i Y to niekoniecznie muszą być zbiory liczbowe. Możemy zdefiniować na zbiorze ludzi (zbiór X) funkcję „kolor włosów", która będzie przybierać wartości ze zbioru Y zawierającego 6 elementów: „blondyn, rudy, szatyn, brunet, siwy, łysy". Można jako zbiory X i Y rozważać punkty płaszczyzny, wtedy funkcjami będą różne przekształcenia tej płaszczyzny (np. przesunięcia równoległe, symetrie, obroty i inne). Bardzo często X i Y to są zbiory liczbowe, czyli podzbiory zbioru liczb rzeczywistych (lub cały zbiór liczb rzeczywistych). Wtedy mówimy, że rozważamy **funkcje liczbowe**.

Teoretycznie na maturze na poziomie podstawowym pojęcie funkcji i zapis $f(x)$ może dotyczyć tylko funkcji liczbowych, ale przecież inne funkcje też istnieją i też można je oznaczyć symbolem f.

Dziedzina funkcji to zbiór tych *x*, dla których funkcja jest określona, czyli tych *x*, dla których wyrażenie *f*(*x*) ma sens.

Dziedzina funkcji to pewien **zbiór**. Jeśli jakieś x należy do dziedziny, $x \in X$, to dla tego x jest zdefiniowana wartość funkcji, czyli $f(x)$. Jeśli x nie należy do dziedziny funkcji, to zastanawianie się nad wartością $f(x)$ nie ma sensu.

Zamiast mówić o dziedzinie, możemy też mówić o zbiorze **argumentów** funkcji. Argumenty funkcji to dopuszczalne wartości x.

Czy jest możliwa sytuacja, że jakieś x należy do dziedziny funkcji, a $f(x)$ dla tego x nie jest określone? Nie.

Dziedzina funkcji może zawierać nieskończenie wiele elementów, a może zawierać ich zaledwie kilka. W takim razie do pełnego opisu funkcji wystarczy graf albo prosta tabelka.

Jeśli nie podano nam dziedziny funkcji liczbowej, musimy sami ustalić, kiedy badane wyrażenie ma sens.

Funkcja liczbowa może być określona dla dowolnych liczb rzeczywistych (tzn. dla $x \in \mathbf{R}$), a może być określona tylko dla niektórych liczb.

Po to, by ustalić dziedzinę funkcji, musimy przede wszystkim wykluczyć z niej miejsca zerowe **mianownika** oraz wykluczyć wartości x, które prowadzą do ujemnych liczb pod **pierwiastkiem** kwadratowym (albo innym pierwiastkiem parzystego stopnia). W drugiej kolejności musimy zwrócić uwagę na **logarytmy**, wyrażenia typu 0^0, a w bardziej zaawansowanych przypadkach (spoza poziomu podstawowego) także na wyrażenia pod znakiem funkcji tangens. Czasami po to, by ustalić dziedzinę funkcji, trzeba będzie rozwiązać jakieś równanie albo nierówność.

Jeśliby podano wzór funkcji, a nie wskazano dziedziny, to będziemy zakładać, że dziedziną jest **maksymalny podzbiór liczb rzeczywistych**, dla których ten wzór ma sens.

Przykład 142. Jaka jest dziedzina funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{1-x^2}$?

Rozwiązanie. Mamy podany wzór funkcji, ale dziedzina nie została z góry narzucona. Będą więc do niej należeć wszystkie liczby rzeczywiste, dla których podany wzór ma sens. Warunkiem, aby pierwiastek dało się obliczyć, jest $x + 2 \geq 0$, czyli do dziedziny powinny należeć wszystkie $x \geq -2$, co oznacza $x \in \langle -2, \infty)$. Wykluczyć trzeba jednak te argumenty, dla których mianownik byłby równy zeru, czyli wykluczone są $x = 1$ oraz $x = -1$. Ostatecznie możemy napisać, że dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle -2, \infty) \setminus \{-1, 1\}$. ■

Przykład 143. Jaka jest dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1-x}$?

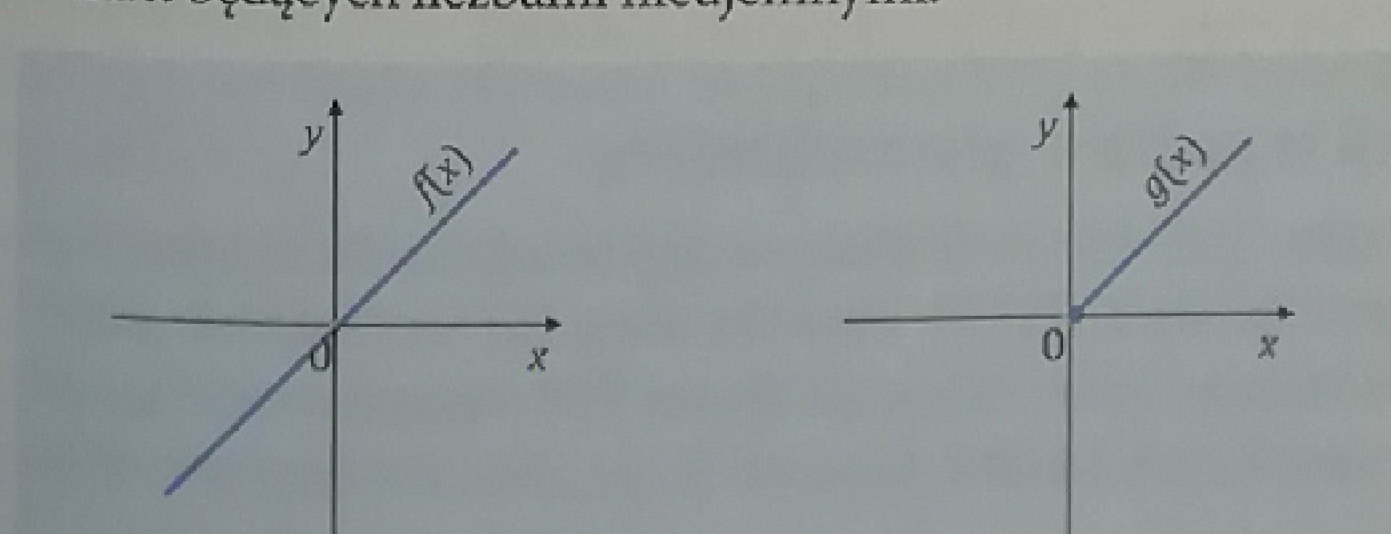
Rozwiązanie. Teoretycznie x mogłoby być dowolną liczbą rzeczywistą. Jednak wyrażenie pod pierwszym pierwiastkiem jest ujemne dla $x < 1$, a wyrażenie pod drugim pierwiastkiem jest ujemne dla $x > 1$. Wszystkie takie wartości są wykluczone. Jako jedyna dopuszczalna wartość pozostaje $x = 1$. Dziedzina funkcji f jest zatem zbiorem **jednoelementowym**, $D = \{1\}$, a funkcja sprowadza się do przekształcenia liczby 1 na liczbę 0. ■

Jeśli funkcje różnią się tylko dziedziną, to znaczy że się różnią.

Brzmi to trochę jak masło maślane, ale to ważne spostrzeżenie.

Przykład 144. Czy istnieje różnica między funkcją $f(x) = x$ i funkcją $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$?

Rozwiązanie. Funkcja f jest określona dla dowolnych rzeczywistych x, natomiast funkcja g jest określona tylko dla x będących liczbami nieujemnymi.



Gdybyśmy się ograniczyli do liczb nieujemnych, różnicy między obydwu funkcjami by nie było. Jednak nie podano takiego ograniczenia, a jeśli chcemy rozważyć jak najszerszy zbiór liczbowy, różnica istnieje. Różnicę tę widać, gdy porównamy wykresy obu funkcji. ■

Jeśli f jest funkcją, to dla danego x istnieje tylko jedna wartość $y = f(x)$.

To bardzo ważna własność, będąca częścią definicji funkcji. Jeśli x należy do dziedziny funkcji f, to $f(x)$ jest ustalone **jednoznacznie**. Dla danego x nie może być dwóch, trzech ani stu dwudziestu wartości $f(x)$. Taka wartość jest dokładnie jedna.

Przykład 145. x należy do zbioru liczb rzeczywistych. Czy przepis słowny „$h(x)$ jest równe x powiększonemu o 3,5" definiuje funkcję?

Rozwiązanie. $h(x)$ jest funkcją, bo każde x można powiększyć o 3,5, i to tylko w jeden sposób. Wzór funkcji łatwo napisać: $h(x) = x + 3{,}5$. ■

Przykład 146. x należy do zbioru liczb rzeczywistych. Czy przepis słowny „$g(x)$ jest równe x plus co najwyżej 1" definiuje funkcję?

Rozwiązanie. $g(x)$ nie jest funkcją, bo dowolnemu argumentowi x można przyporządkować nie jedną, ale nieskończenie wiele wartości $g(x)$. Na przykład $x = 4$ mogłoby odpowiadać takie wartości jak $g(x) = 4{,}1$, $g(x) = 4{,}97$, $g(x) = 4{,}23175...$ i wiele innych. ■

Ćwiczenie 158. Czy $f(x)$ określone dla dodatnich x przepisem słownym „$f(x)$ to taka liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu daje x" jest funkcją?

Różnym wartościom x może odpowiadać ta sama wartość $f(x)$.

Bardzo często tak właśnie jest. Na przykład funkcja $f(x) = x^2$ przybiera takie same wartości dla 2 i −2, dla 3 i −3, i ogólnie dla x i $-x$; podobne właściwości ma funkcja $f(x) = |x|$. Może się nawet zdarzyć, że wszystkim wartościom x odpowiada jedna i ta sama wartość — wtedy jest to **funkcja stała**, $f(x) = a$.

Zdarza się jednak, że funkcja jest **różnowartościowa**, czyli taka, że różnym wartościom x odpowiadają różne wartości $f(x)$. Na przykład funkcje $f(x) = 2x$ i $f(x) = x^3 + 5$ są różnowartościowe. Wtedy, znając $f(x)$, możemy ustalić, jakie było x. Z wykresu na ogół łatwo jest odczytać, czy funkcja jest różnowartościowa (patrz s. 154). Na podstawie samego wzoru rozpoznanie funkcji różnowartościowej może nie być łatwe.

Przeciwdziedzina to zbiór Y, czyli ten zbiór, z którego wybieramy wartości $f(x)$.

Możliwe wartości $f(x)$ muszą należeć do zbioru Y (do przeciwdziedziny), ale nie muszą go „wypełniać". Jest możliwe, że jakaś wartość $y \in Y$ nie będzie wartością $f(x)$ dla żadnego $x \in X$. Może się nawet zdarzyć, że każdemu elementowi zbioru X odpowiada ten sam element zbioru Y, a pozostałe elementy zbioru Y są „niewykorzystane" (tak jest dla funkcji stałej).

Zbiór wartości funkcji to podzbiór przeciwdziedziny.

Zbiór wartości to zbiór tych y, które faktycznie odpowiadają jakimś argumentom. Przeciwdziedzina może być zbiorem obszernym, a zbiór wartości może być stosunkowo „mały". Na przykład funkcję $f(x) = 2$ możemy rozważać jako funkcję ze zbioru liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych. Dziedziną będzie więc **R**, przeciwdziedziną też **R**, ale zbiór wartości jest zaledwie jednoelementowy, równy $\{2\}$.

Przykład 147. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2$ rozważanej dla $x \in \mathbf{R}$.

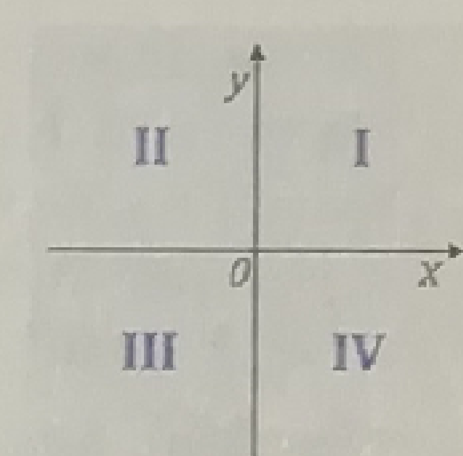
Rozwiązanie. Odpowiednio dobierając x, możemy uzyskać jako $f(x)$ wszystkie nieujemne liczby rzeczywiste. Zatem zbiór wartości można zapisać jako $\langle 0, \infty)$, czyli inaczej $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ albo $\{y\colon y \geq 0\}$. ■

Ćwiczenie 159. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Współrzędne i punkty na płaszczyźnie

Przypomnij sobie numerację ćwiartek układu współrzędnych.

Ćwiartki numeruje się w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Trzeba pamiętać, co to znaczy, że jakiś punkt jest w I, II, III albo IV ćwiartce układu współrzędnych.



Ćwiczenie 160. W której ćwiartce znajduje się punkt, którego współrzędna x jest dodatnia, a współrzędna y ujemna?

Osie układu oznaczamy *Ox* oraz *Oy*.

Osie układu w różnych podręcznikach, repetytoriach i zbiorach zadań są różnie nazywane i oznaczane; każdy autor i nauczyciel ma swoje preferencje. Niektórzy piszą o osiach x i y, inni o osiach X i Y, osiach OX i OY albo jeszcze inaczej. Zachęcamy, byś przyzwyczaił się do pisania o osiach **Ox** i **Oy**, bo takie oznaczenia występują w treści zadań przygotowywanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

- **Oś *Ox* to inaczej oś odciętych, a oś *Oy* to inaczej oś rzędnych.**

Podajemy to dla porządku, bo było to wspominane w szkole, ale nie będziemy słów „odcięta" i „rzędna" używać. W zadaniach maturalnych CKE te wyrazy się nie pojawiają.

Początek układu współrzędnych to punkt *O* o współrzędnych (0, 0).

Kreśląc układ współrzędnych, na ogół nie zaznaczamy punktu O, tylko piszemy zero, oznaczające zerowe współrzędne x i y. W druku różnica między literą O i cyfrą 0 czasami jest wyraźna (litera powinna być pochyła, a cyfra prosta). Gdy piszesz długopisem, różnica jest niedostrzegalna.

Współrzędne punktów zapisuj w postaci *A* = (..., ...).

Jeśli punkt A ma współrzędne $x = 5$ oraz $y = 4$, to pisz $A = (5, 4)$. W repetytoriach i zbiorach zadań można też spotkać zapis bez znaku równości, na przykład $A(5, 4)$, ale lepiej stosuj się do zwyczajów, jakich przestrzega CKE.

Po przecinku dobrze jest dać **wyraźny odstęp**, aby było jasne, że nie chodzi o przecinek dziesiętny. Zapis $B = (1{,}2,\ 3{,}4)$ jest dużo bardziej klarowny niż zapis $B = (1{,}2{,}3{,}4)$. Jeśli masz obawy, że odstęp to za mało, do rozdzielenia liczb **możesz użyć średnika**; w matematyce ten znak do niczego innego poza rozdzielaniem liczb nie jest używany, więc zapis $B = (1{,}2;3{,}4)$ będzie jednoznaczny nawet bez odstępu.